Κίνηση σημειακής μάζας σε κεντρικά πεδία δυνάμεων

Ελένη Βαρδουλάκη
Thüringer Landessternwarte Tautenburg

elenivard@gmail.com;
https://www.linkedin.com/in/eleni-vardoulaki/
Rogue Astrophysics; Astronomy on Tap Jena
elenivardoulaki.com

slides

ΕΚΠΑ
ΜΑΪΟΣ 2023

Περίληψη

1. Τι είναι οι κεντρικές δυνάμεις;

2. Πως κινείται μια σημειακή μάζα σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων;

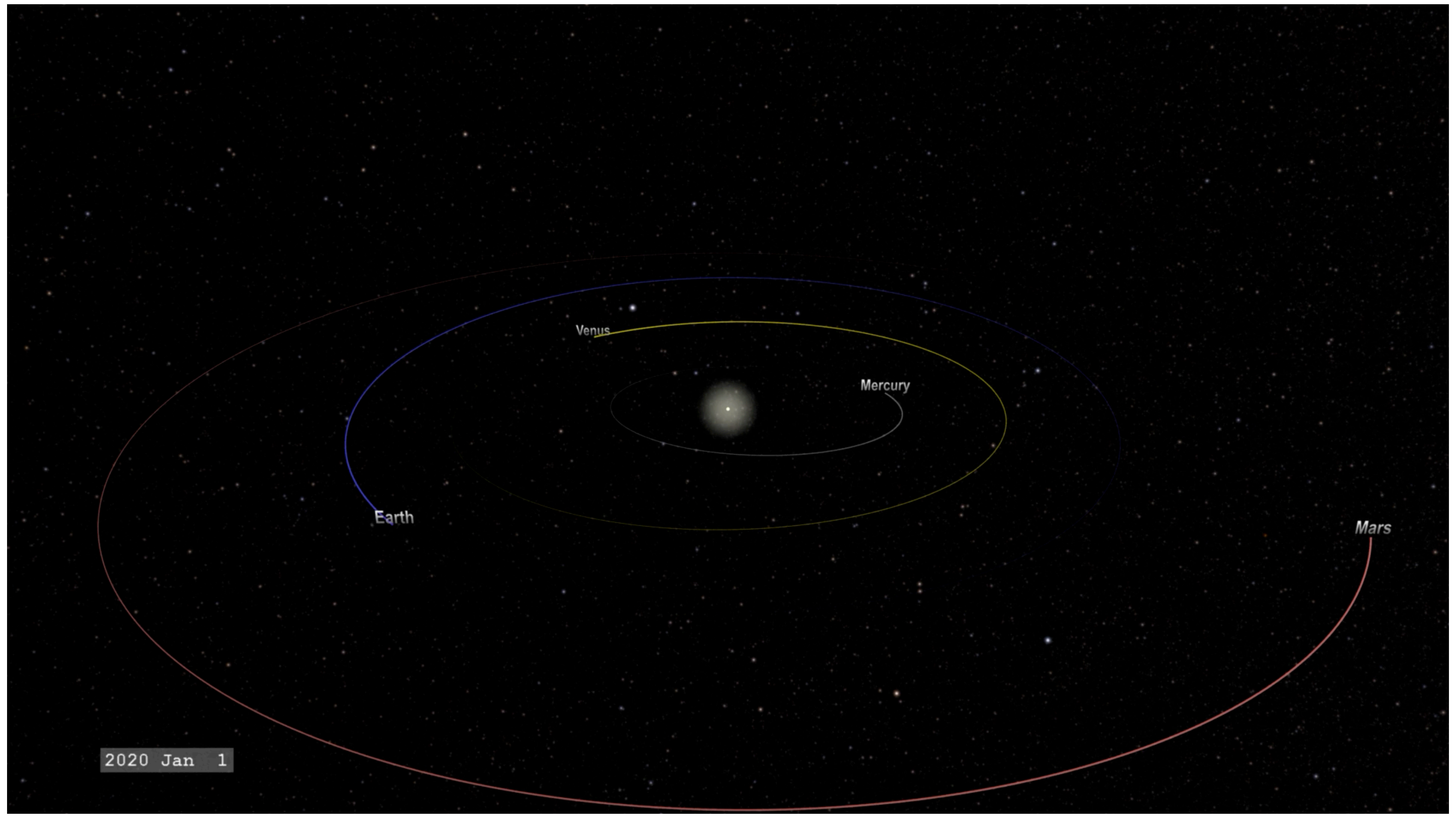
3. Παραδείγματα

Κεντρικά πεδία δυνάμεων

Η θεωρία των κεντρικών πεδίων δυνάμεων απαντά σε ένα βασικό αμφίπλευρο ζητούμενο της κλασικής Μηχανικής

1. Υπολογισμός τροχιών σώματος υπό την επίδραση κεντρικών δυνάμεων

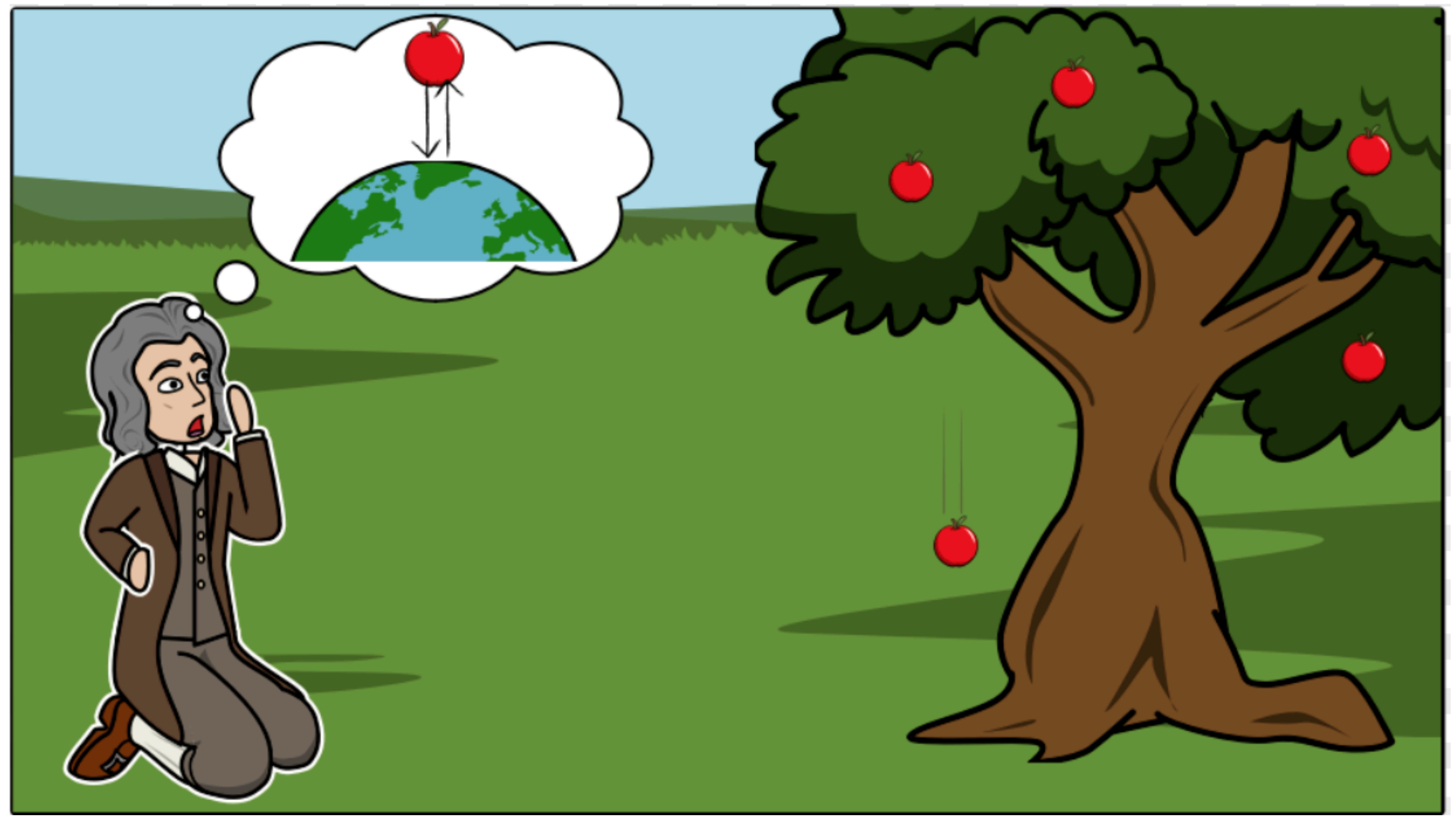
2. Υπολογισμός των κεντρικών δυνάμεων που προκαλούν γνωστές τροχιές



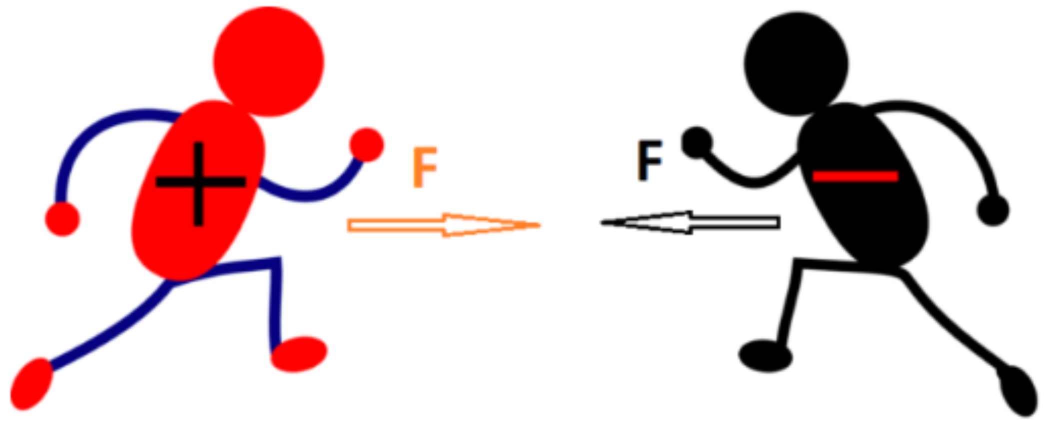
Credit: NASA

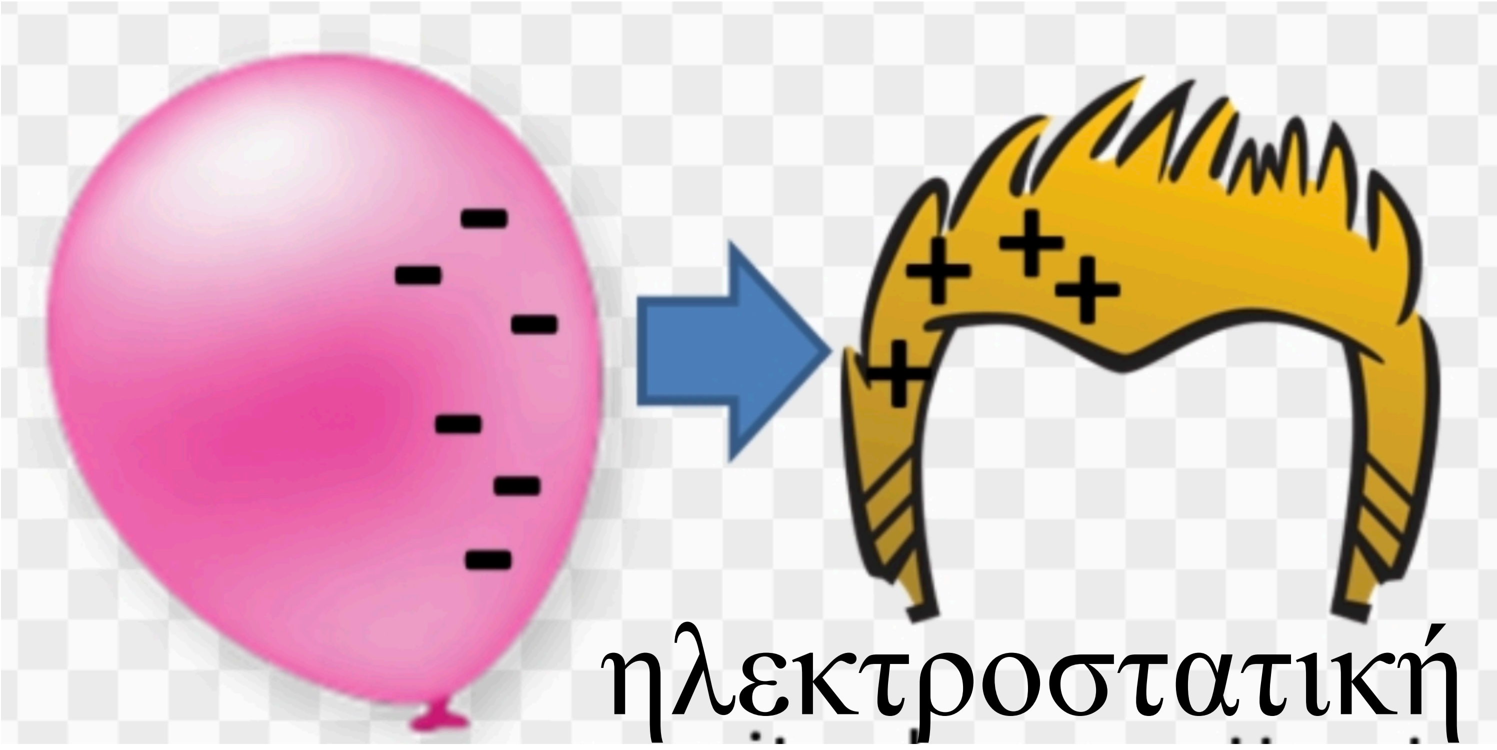
Κεντρικά πεδία δυνάμεων

1. Βαρύτητα



2. Δυνάμεις Coulomb

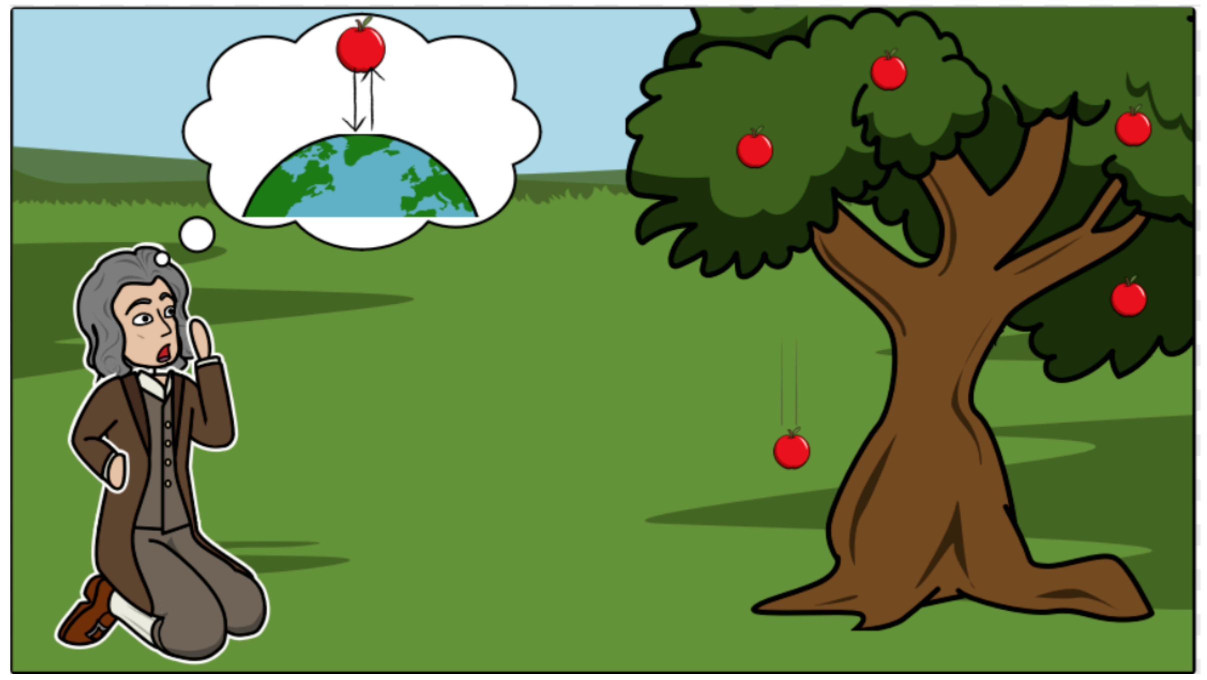




Κεντρικά πεδία δυνάμεων

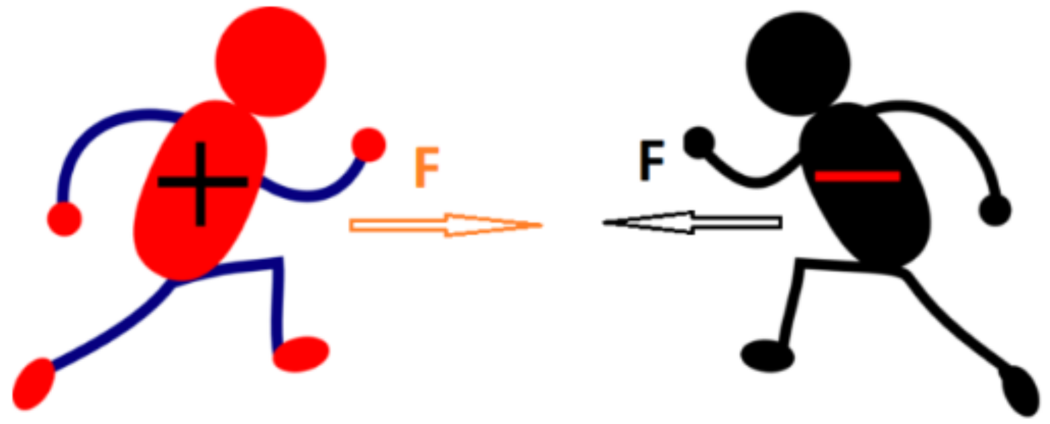
1. Βαρύτητα

2. Δυνάμεις Coulomb



Newton

Coulomb



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$|F| = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

διατηρητικές / συντηρητικές κεντρικές δυνάμεις

έργο δύναμης πεδίου εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση, **ΟΧΙ** από τη διαδρομή

+

έργο δύναμης πεδίου σε κλειστή διαδρομή = 0

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

μη διατηρητικές / μη συντηρητικές κεντρικές δυνάμεις

έργο δύναμης πεδίου εξαρτάται από την αρχική, την τελική θέση **ΚΑΙ** από τη διαδρομή

+

έργο δύναμης πεδίου σε κλειστή διαδρομή $\neq 0$

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

Ποιες δυνάμεις είναι διατηρητικές ή μη διατηρητικές;

βαρυτική

ελαστική

ηλεκτροστατική

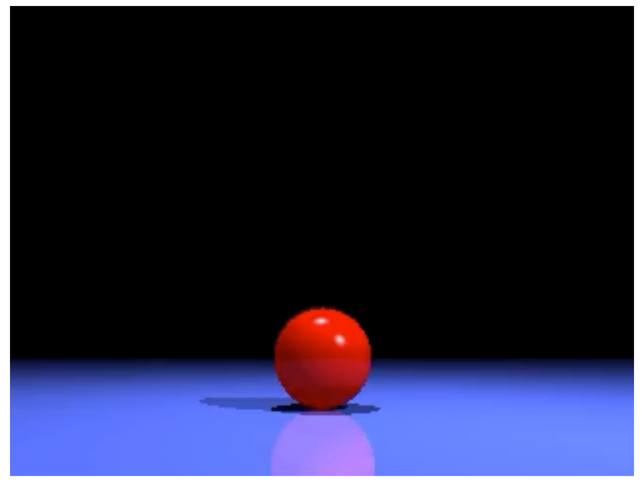
αντίσταση αέρα

τριβή

the force

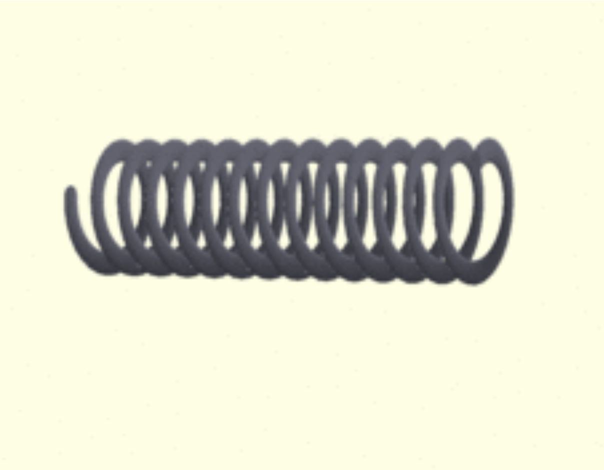
κουιζάκι - λύσεις

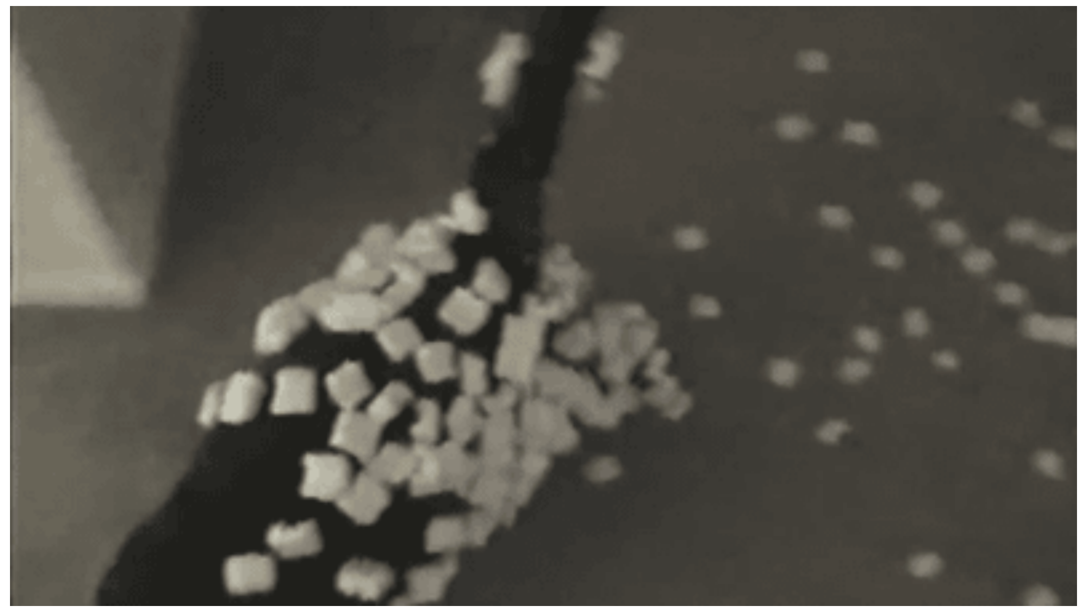
Ποιες δυνάμεις είναι διατηρητικές ή μη διατηρητικές;



βαρυτική

ελαστική, δύναμη επαναφοράς



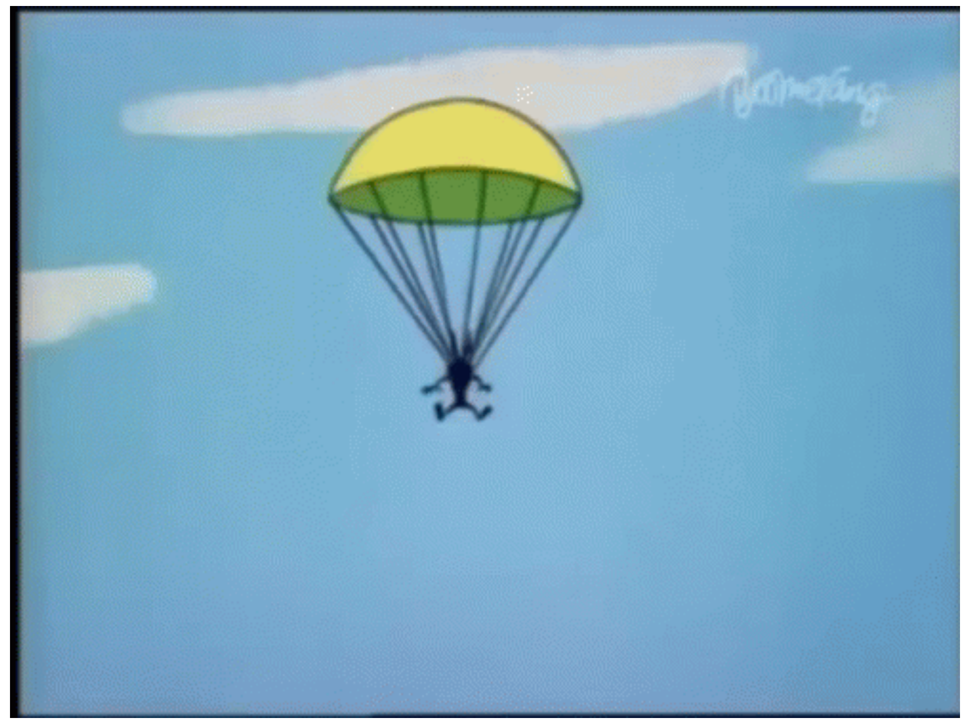


ηλεκτροστατική

the force ??

τριβή

αντίσταση αέρα



Ποιες δυνάμεις είναι διατηρητικές ή μη διατηρητικές;

ELENIVARD@GMAIL.COM

Παραδοχές

Υλικό σημείο:

* Θέση καθορίζονται από συντεταγμένες σημείου στον χώρο
* Καταλαμβάνει μηδενικό όγκο
* Χαρακτηρίζεται από σταθερές παραμέτρους (μάζα, ηλεκτρικό φορτίο κλπ) = 0, εκτός της αδρανειακής μάζας

Αυτή η διάλεξη $\longrightarrow$ Σημειακή μάζα

Κεντρικές δυνάμεις

Το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα της κίνησης ενός εικονικού σώματος σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης

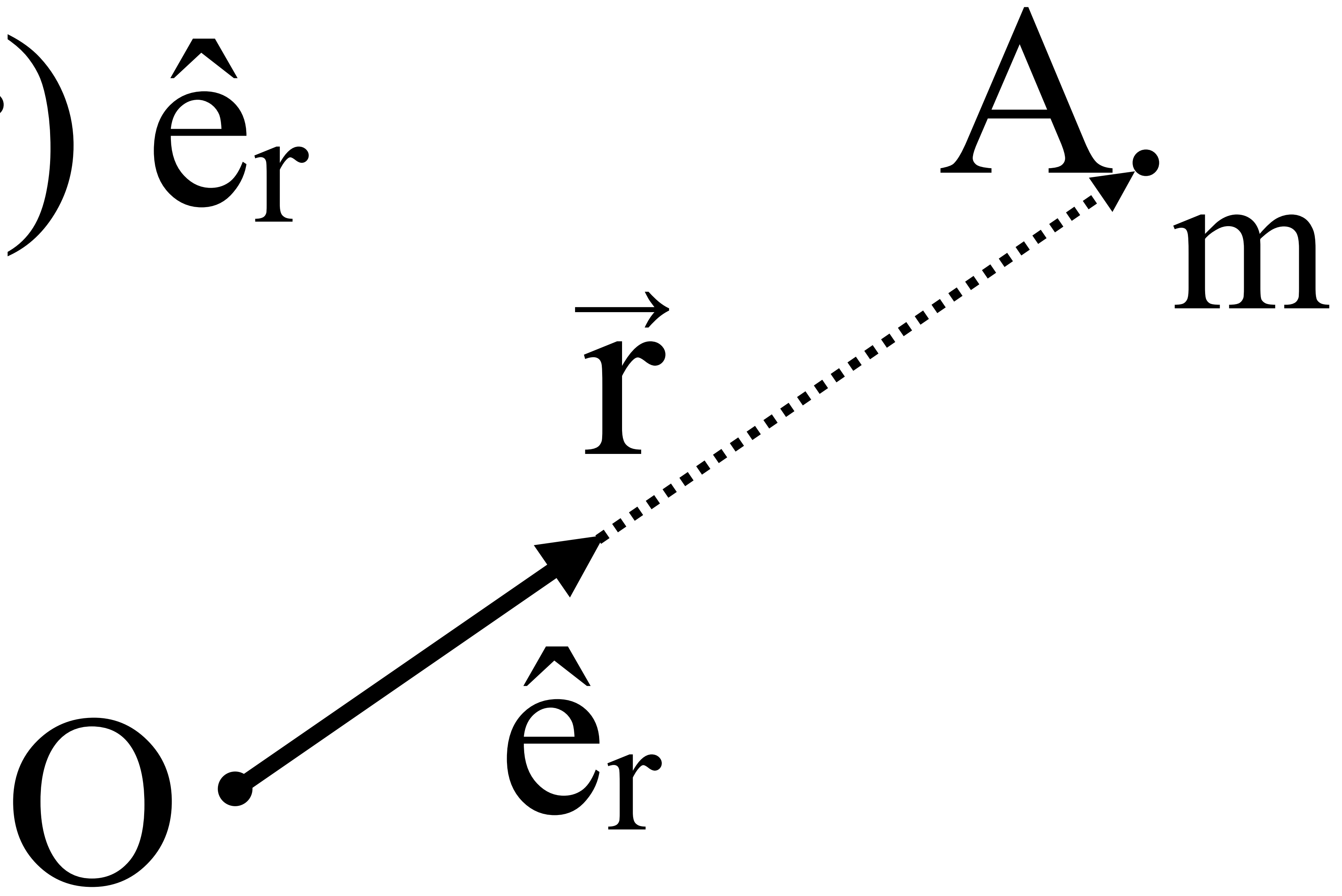
$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r$$

*προϋπόθεση: σφαιρική συμμετρία

Κεντρικά πεδία δυνάμεων

Πεδίο δυνάμεων = δύναμη σε κάθε σημείο του χώρου κατευθύνεται από ή προς ένα συγκεκριμένο και σταθερό σημείο O

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r$$



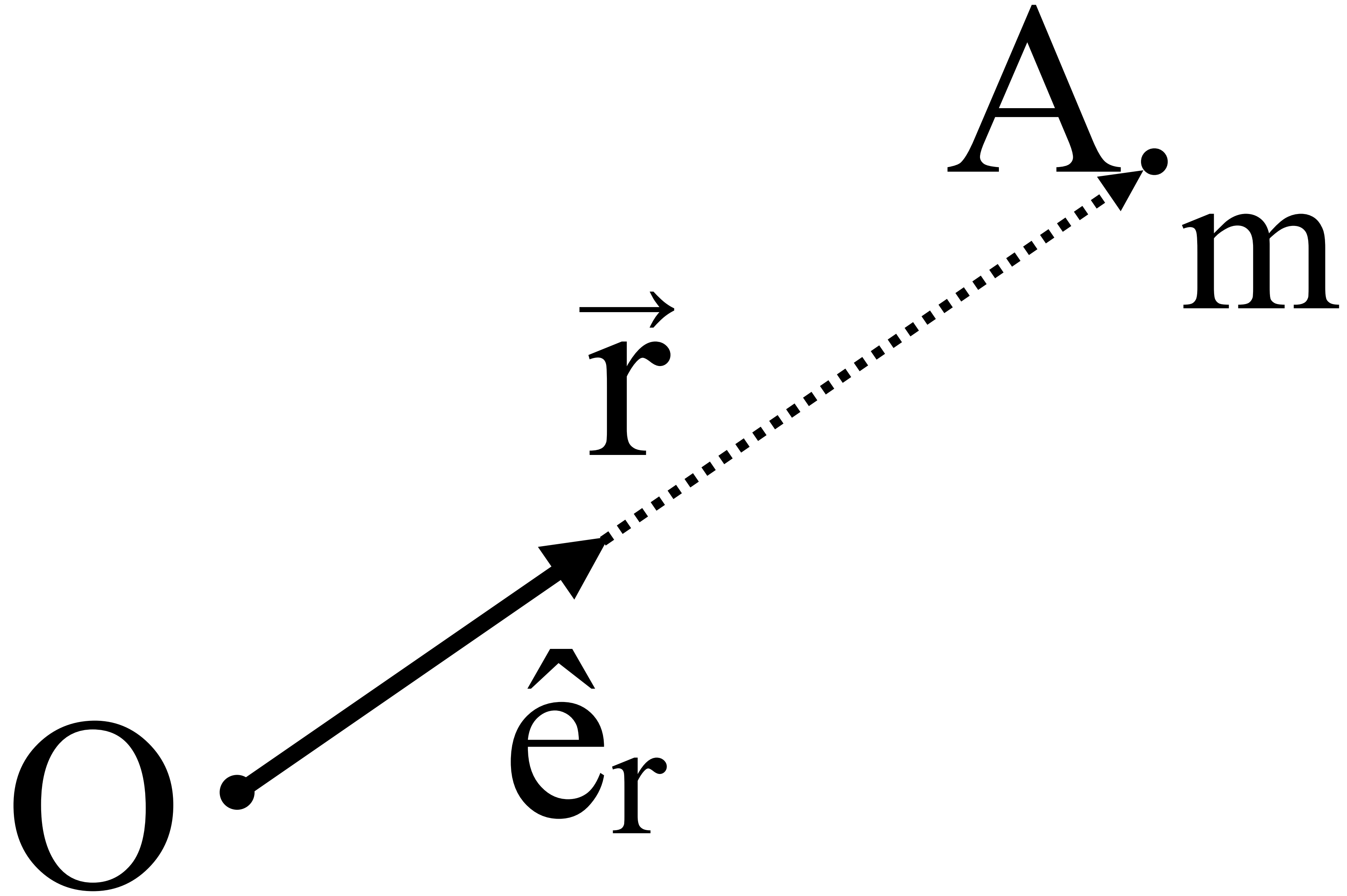

Credit: Reddit

*προϋπόθεση: σφαιρική συμμετρία

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

Κεντρικά πεδία δυνάμεων

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r$$



Προϋποθέσεις:

- Πρέπει να υπάρχει ένα κέντρο, πηγή πεδίου
- Από κει συντρέχουν οι φορείς των δυνάμεων
- Η ένταση των δυνάμεων σε κάθε σημείο του χώρου εξαρτάται από την απόσταση του από την πηγή πεδίου

Κεντρικά πεδία δυνάμεων

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r$$

Σώμα πολύ μεγάλης μάζας:
Έστω ακίνητο/στατικό

Βαθμωτή συνάρτηση:
Πως μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης με τη θέση του σωματιδίου

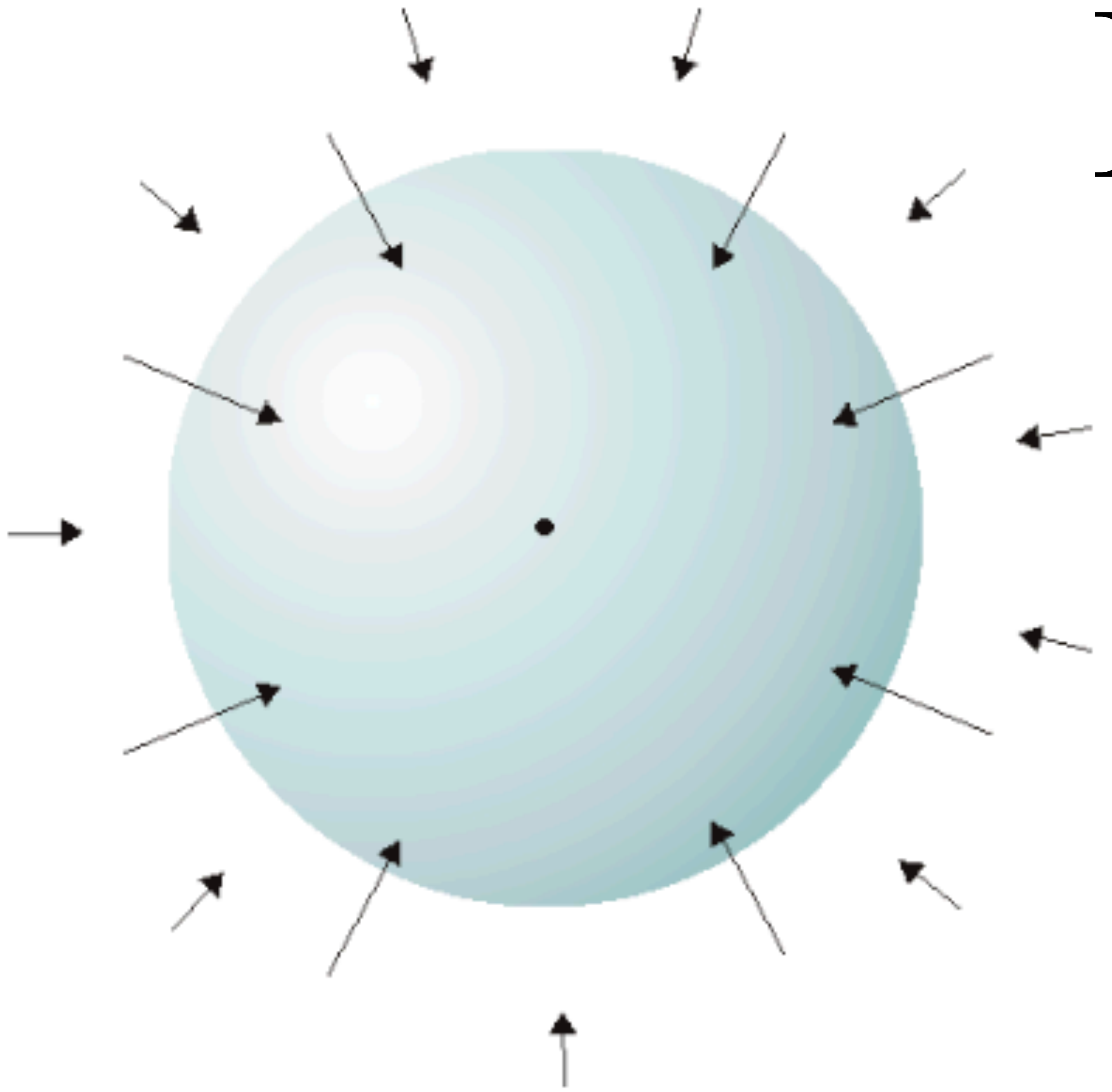
Διάνυσμα θέσης σωματιδίου:
Σημειακό (ή πολύ μικρή μάζα)

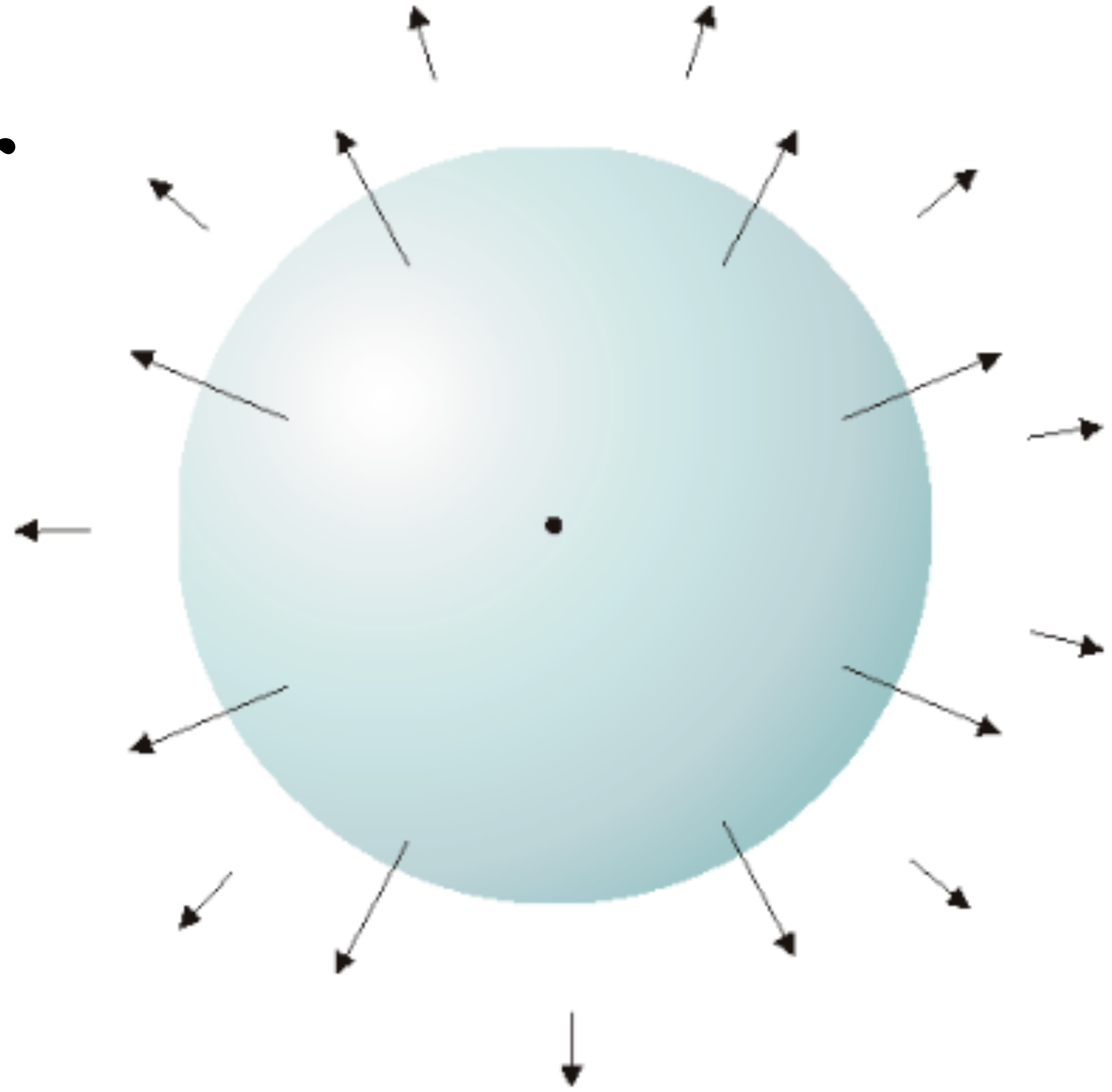
Κεντρικά πεδία δυνάμεων

Ελκτικό κεντρικό πεδίο δυνάμεων
$f(r) < 0$

Απωστικό κεντρικό πεδίο δυνάμεων
$f(r) > 0$

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r$$



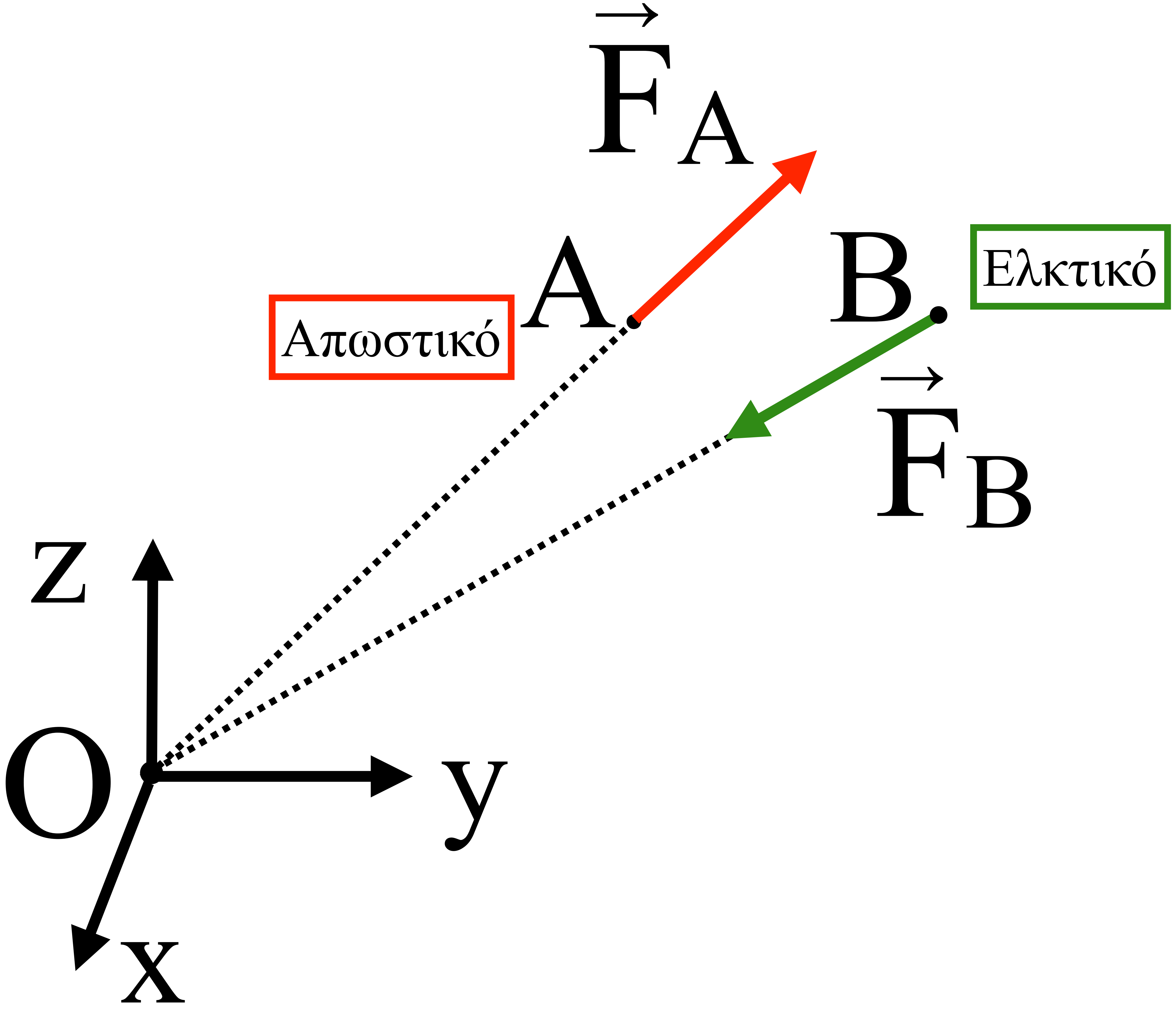


Κεντρικά πεδία δυνάμεων

$$\vec{F} = V(r)\,\hat{e}_r$$

Κεντρικό δυναμικό V=V(r)

*σφαιρικές συντεταγμένες: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$



ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

Κεντρική κίνηση

Η κίνηση υλικού σημείου που υπόκειται σε κεντρικές δυνάμεις

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\Downarrow$$

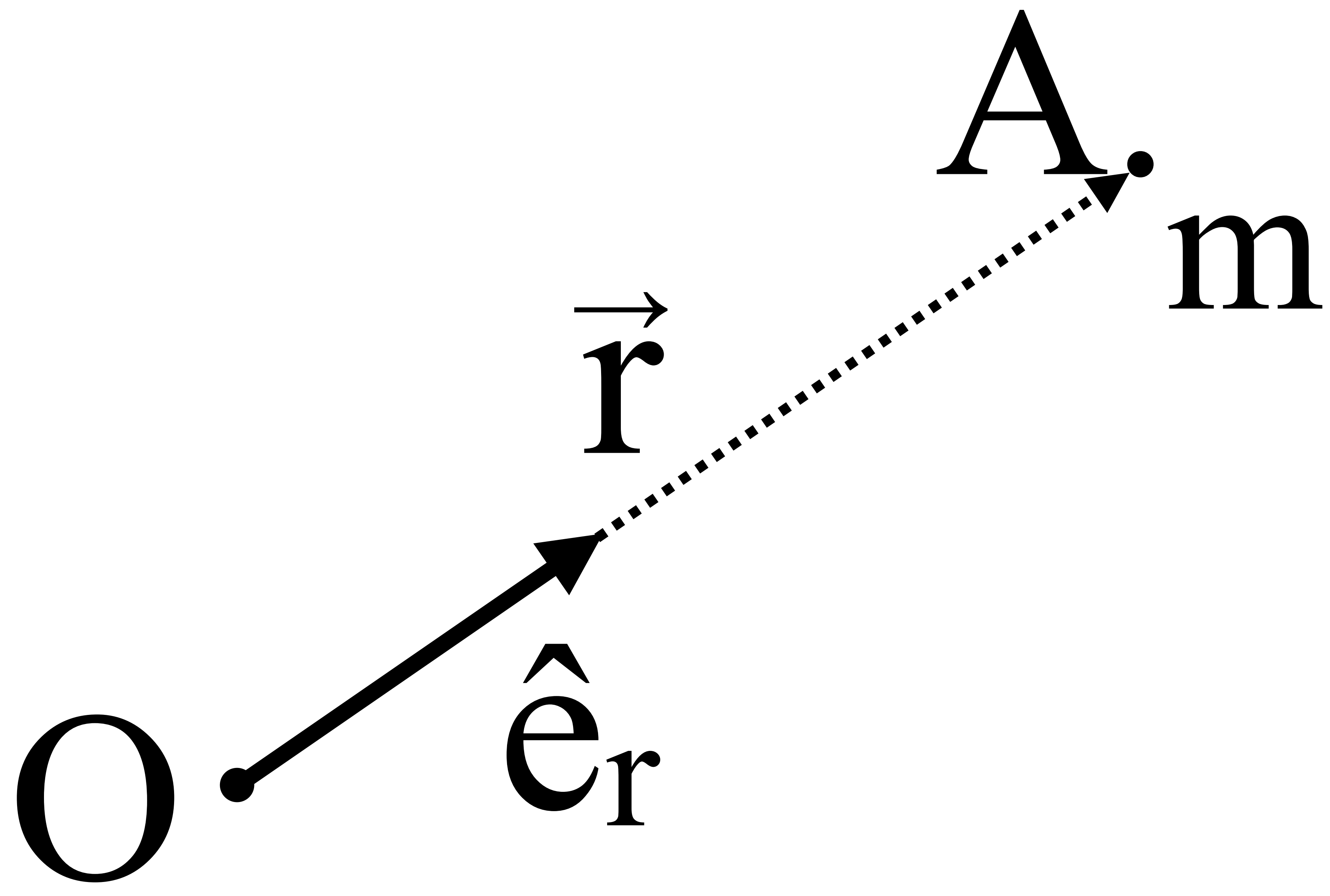
$$\vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

Στροβιλισμός = 0 μόνο για κεντρικό δυναμικό, αστρόβιλο πεδίο

Η τροχιά μιας σημειακής μάζας εξελίσσεται σε ένα επίπεδο που ορίζεται από την πηγή του πεδίου και τις αρχικές συνθήκες της θέση και της ταχύτητάς της.

* επίπεδο είναι κάθετο στο διάνυσμα της στροφορμής **L** (= σταθ.)
* 2 ενεργοί βαθμοί ελευθερίας

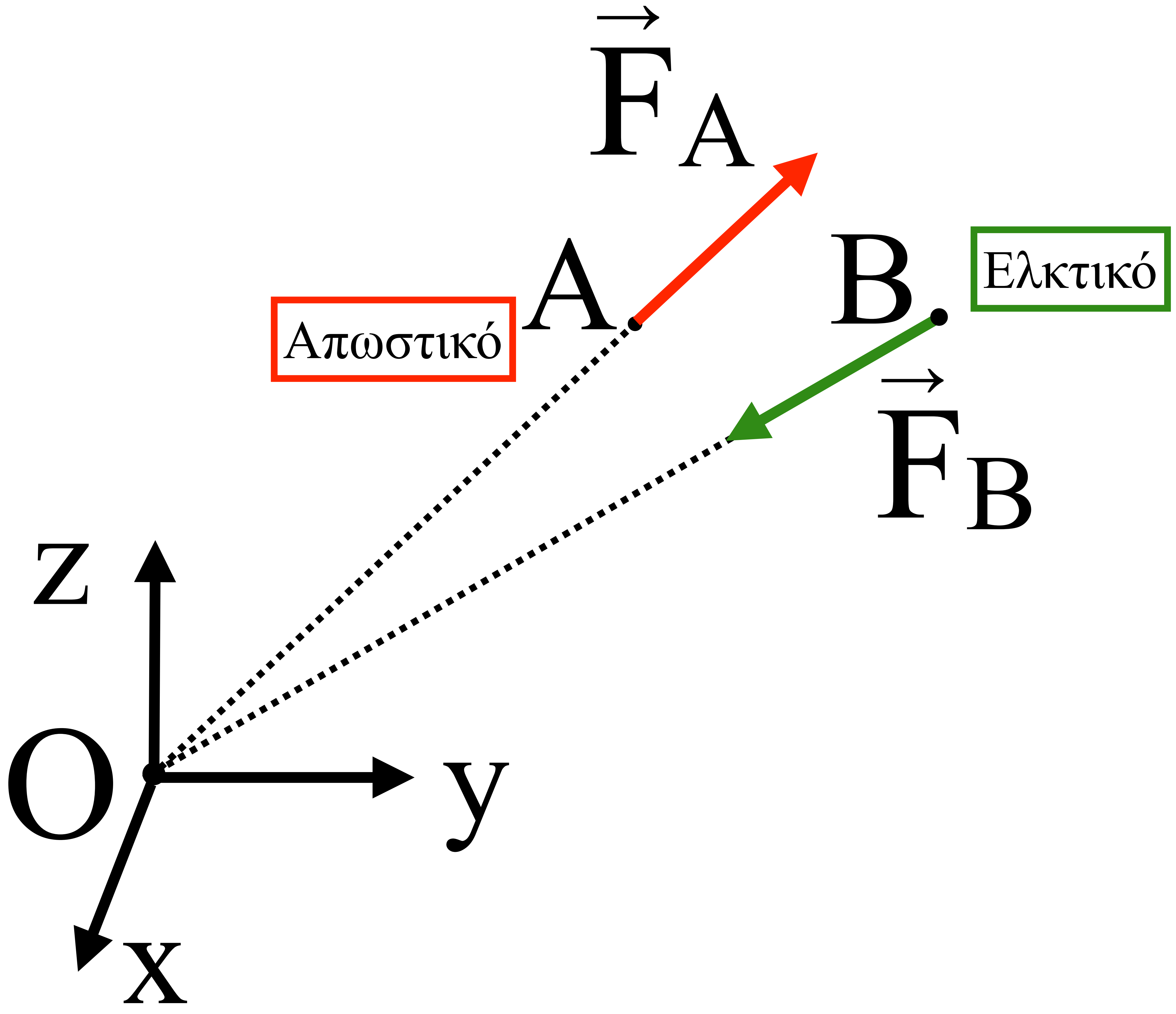
$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r}$$



$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{\mathbf{e}}_r}$$

$$\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

θετική/αρνητική



ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

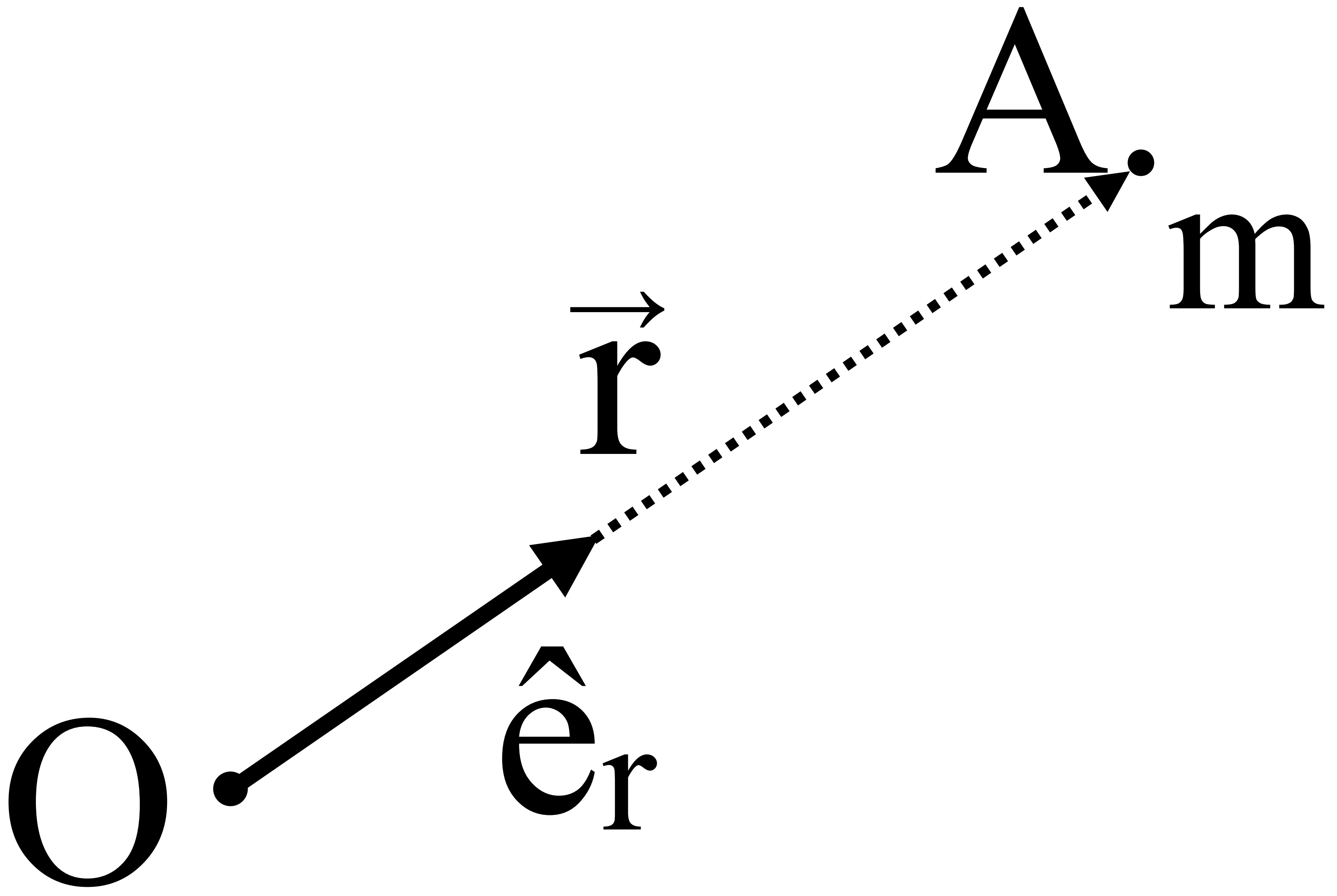
Εξισώσεις κίνησης

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r}$$

$$\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (F\,\hat{e}_r) = 0$$

ροπή ως προς O = 0



ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

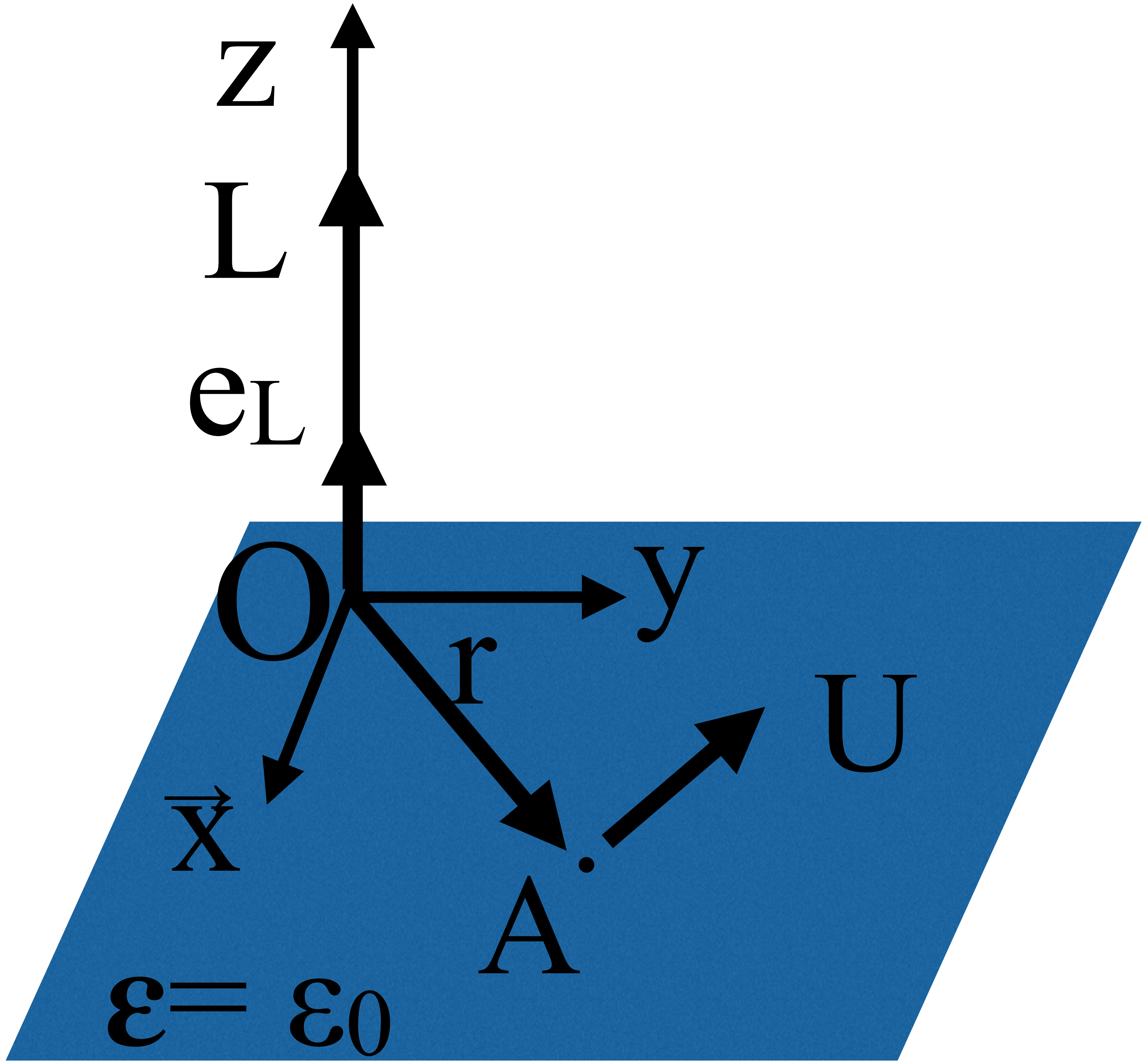
Εξισώσεις κίνησης

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r}$$

$$\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (F\,\hat{e}_r) = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\mathbf{r}} = L\,\hat{e}_L \quad \& \quad \dot{L} = \vec{G}$$



Διάνυσμα στροφορμής = σταθερό / δεν αλλάζει ο προσανατολισμός του ούτε το μέτρο του (κεντρικές δυνάμεις)

Ελένη Βαρδουλάκη
elenivard@gmail.com

Εξισώσεις κίνησης

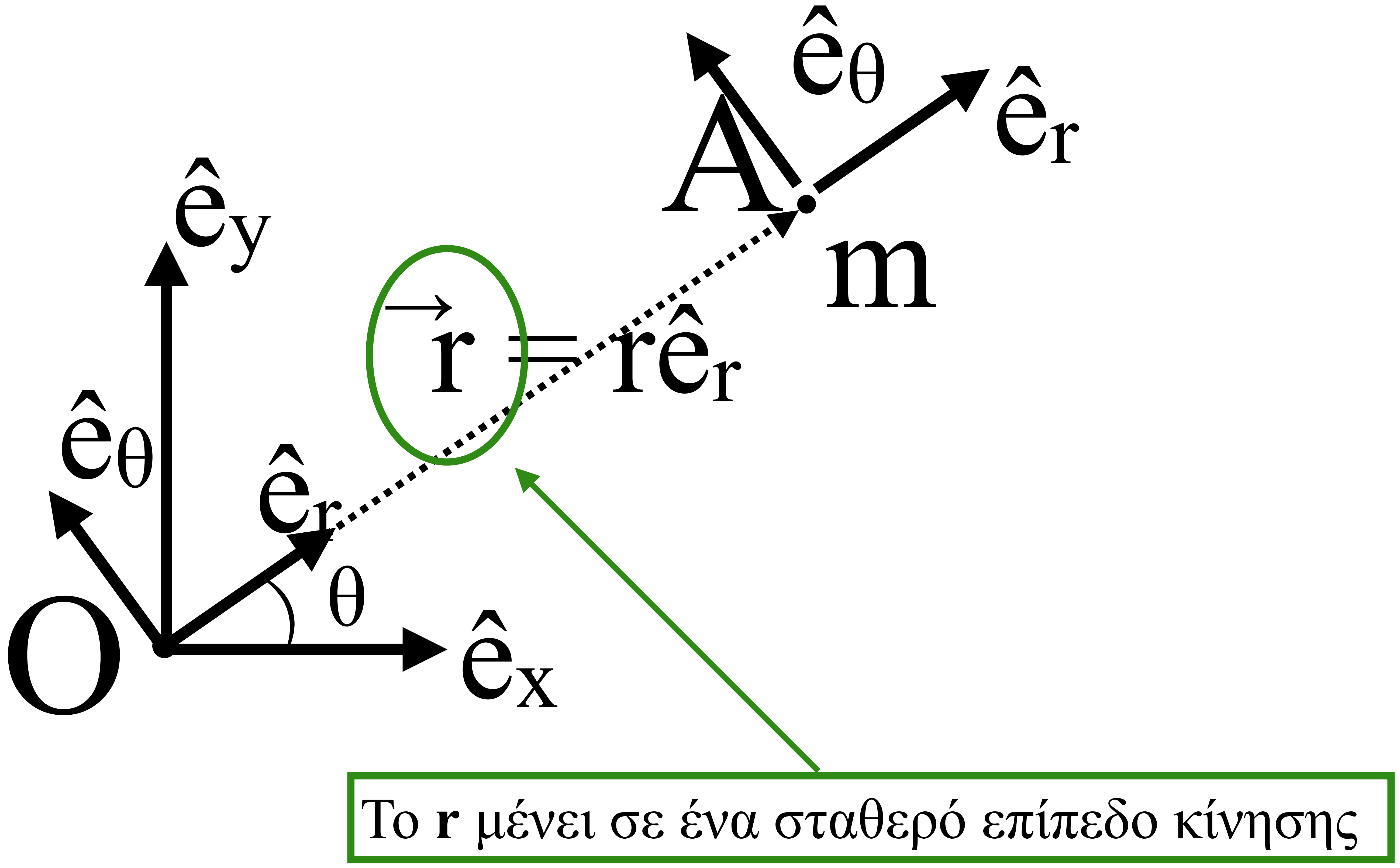
Εξίσωση του Νεύτωνα

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r}$$

+

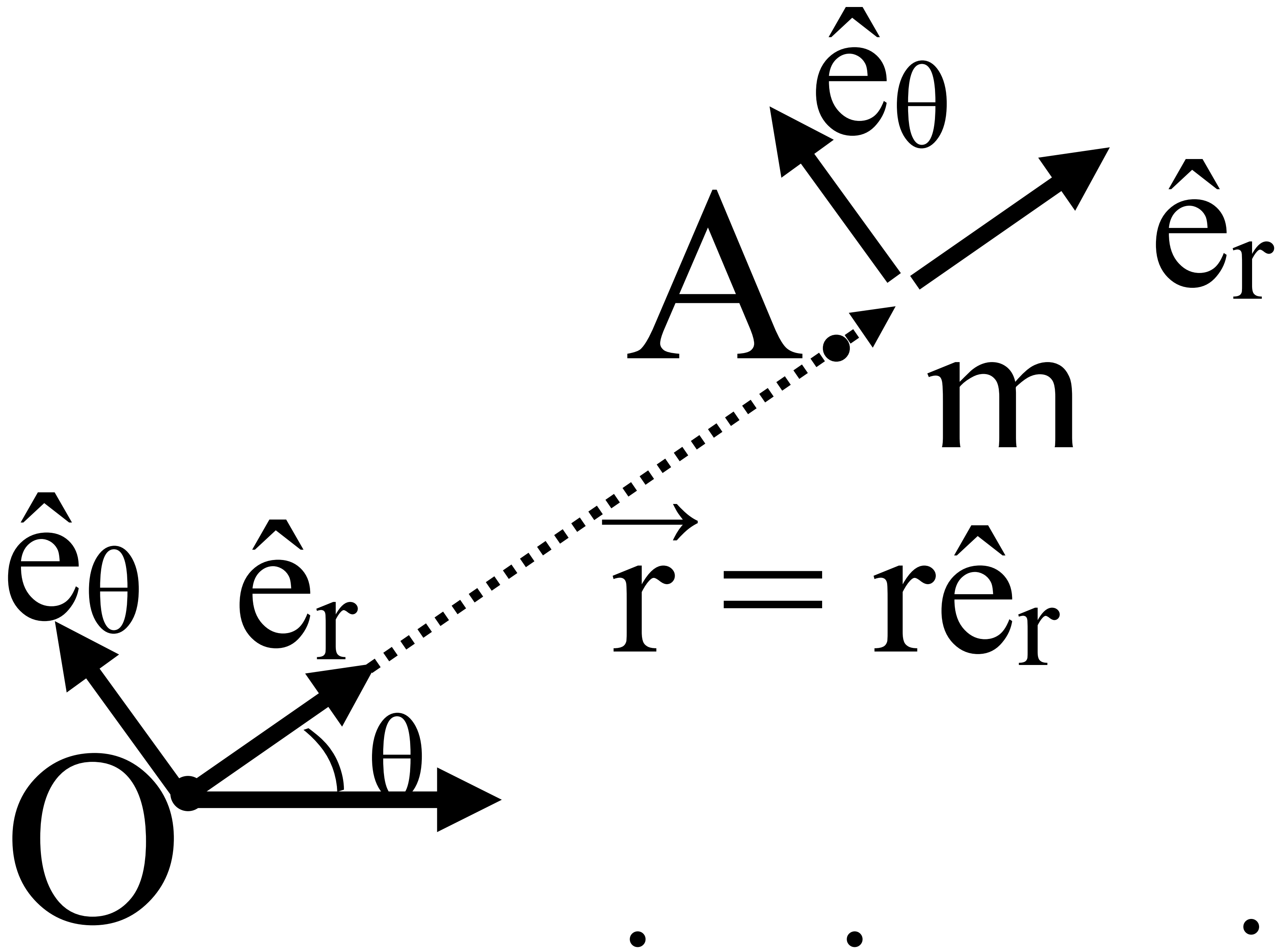
Πολικές συντεταγμένες

$\boxed{r, \theta}$



Εξισώσεις κίνησης

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r} \Longrightarrow m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta] = F(\dot{r}, r, t)\,\hat{e}_r$$



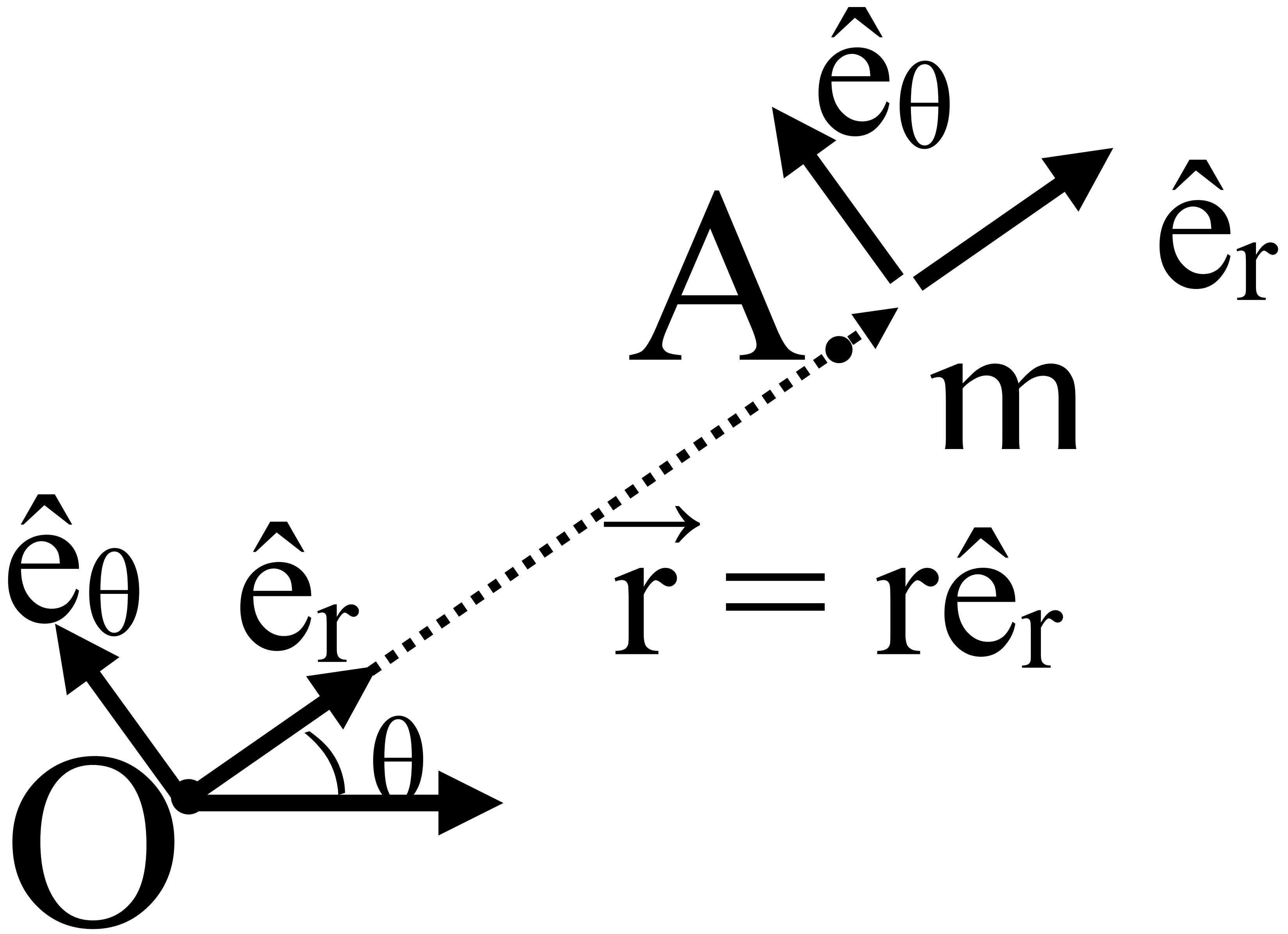
$$\mathbf{r} = r\,\hat{e}_r \;\;\&\;\; \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

Εξισώσεις κίνησης

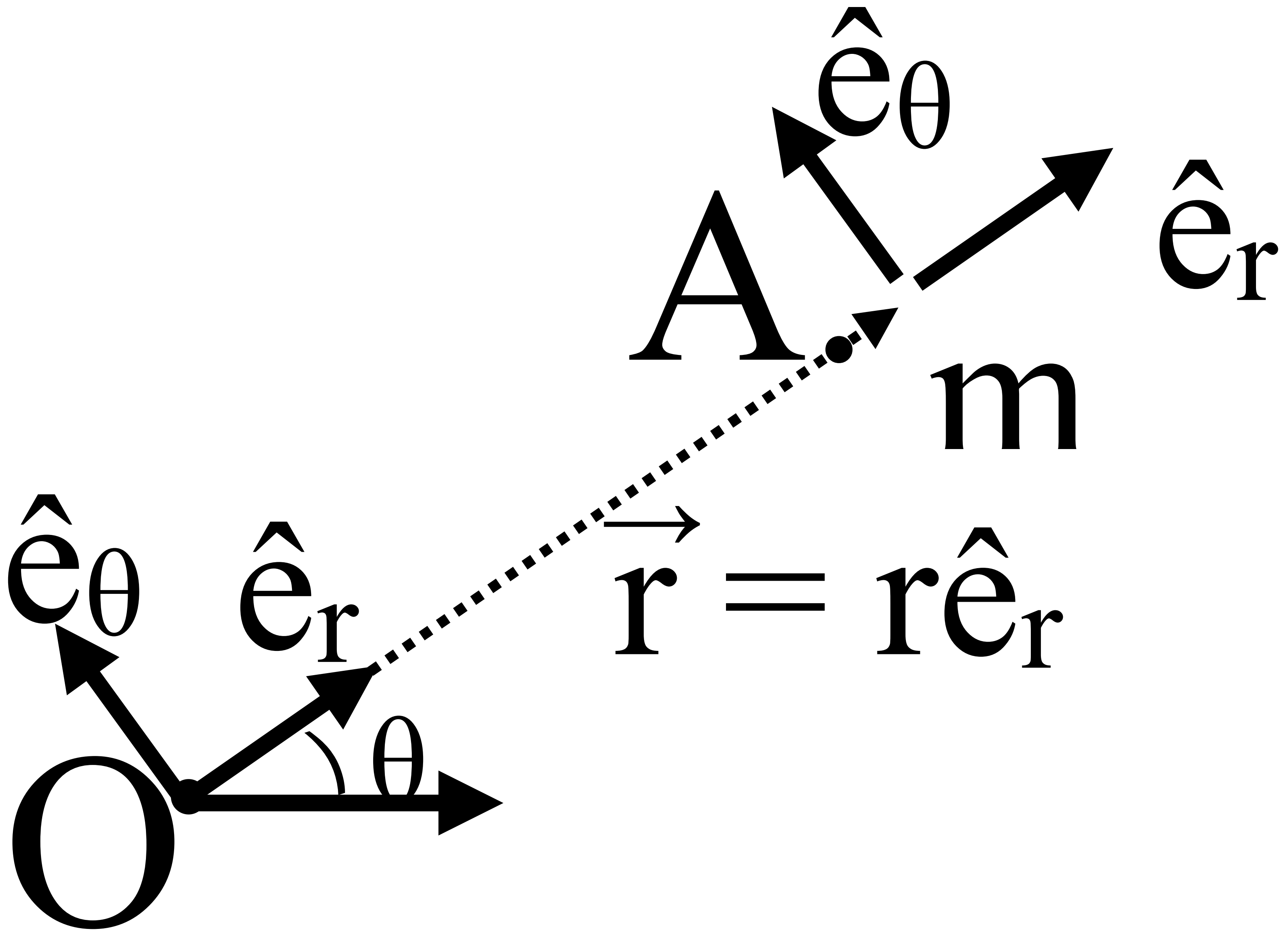
$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r} \quad \Longrightarrow \quad m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta] = F(\dot{r}, r, t)\,\hat{e}_r$$

$$\boxed{\text{Κεντρικό δυναμικό } V(r)} \quad \Downarrow \quad \vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\,\hat{e}_r$$



Εξισώσεις κίνησης

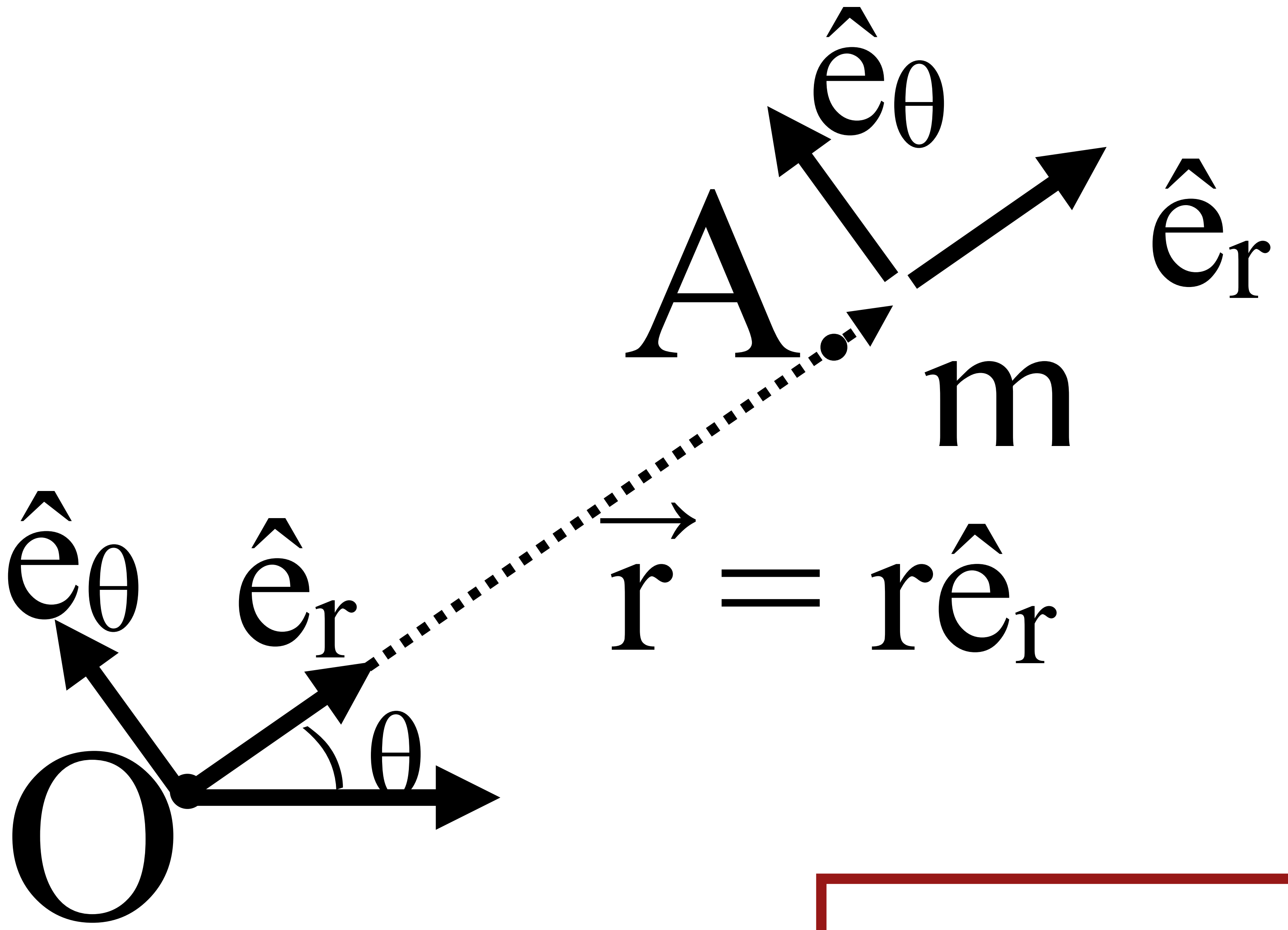
$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r} \quad \Longrightarrow \quad m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta] = F(\dot{r}, r, t)\,\hat{e}_r$$



$\boxed{\text{Κεντρικό δυναμικό V(r)}}$ $\Downarrow$ $\vec{F} = -\dfrac{dV(r)}{dr}\,\hat{e}_r$

$$m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta] = -\frac{dV}{dr}\,\hat{e}_r$$

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r} \Longrightarrow m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta] = F(\dot{r}, r, t)\,\hat{e}_r$$



$\boxed{\text{Κεντρικό δυναμικό V(r)}}$ $\Downarrow$ $$\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr}\,\hat{e}_r$$

$$m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta] = -\frac{dV}{dr}\,\hat{e}_r$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}} \quad + \quad \boxed{m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0}$$

Νόμοι διατήρησης

$$m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad \underset{r}{\overset{\int}{\Longrightarrow}} \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \quad \overset{\int}{\Longrightarrow} \quad mr^2\frac{d\theta}{dt} = L$$

σταθερά

$$\boxed{m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}}$$

$$\boxed{m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0}$$

$$\xRightarrow[r]{\int} \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \quad \xRightarrow{\int} \quad \boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L}$$

σταθερά

στροφορμή

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\ \hat{e}_z$$

όπου $\hat{e}_L = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_z = \sigma\tau\alpha\theta.$

Ξέρουμε:

$\mathbf{r} = r\,\hat{e}_r$ & $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

$$m[(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$\underset{r}{\overset{\int}{\Longrightarrow}} \quad m\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) = 0 \quad \overset{\int}{\Longrightarrow} \quad mr^2\frac{d\theta}{dt} = L$$

σταθερά

στροφορμή

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{r}$$

Νόμος διατήρησης στροφορμής

$$\Longrightarrow \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\ \hat{e}_z$$

όπου $\hat{e}_L = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_z = \sigma\tau\alpha\theta.$

Ξέρουμε:

$\mathbf{r} = r\,\hat{e}_r$ & $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

$$\Longrightarrow \boxed{L = mr^2\dot{\theta}}$$

Νόμοι διατήρησης

$$\boxed{m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}}$$

$$\Big\Downarrow\ \dot{r}$$

$$m\dot{r}\ddot{r} - mr\dot{r}\dot{\theta}^2 + \dot{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

Νόμοι διατήρησης

$$\boxed{m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}}$$

$$\Downarrow \dot{r}$$

$$m\dot{r}\ddot{r} - mr\dot{r}\dot{\theta}^2 + \dot{r}\frac{dV}{dr} = 0 \quad + \quad \boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V\right) = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} = L$$

$$\frac{dV(r)}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\boxed{m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}}$$

$$\Big\Downarrow \; \dot{r}$$

$$m\dot{r}\ddot{r} - mr\dot{r}\dot{\theta}^2 + \dot{r}\frac{dV}{dr} = 0 \quad + \quad \boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V\right) = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} = L$$

$$\frac{dV(r)}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E}$$, με E σταθ. και $$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

$$\boxed{m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}}$$

$$\Big\Downarrow \; \dot{r}$$

$$m\dot{r}\ddot{r} - mr\dot{r}\dot{\theta}^2 + \dot{r}\frac{dV}{dr} = 0 \quad + \quad \boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V\Big) = 0$$

$$\frac{dV(r)}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$mr^2\dot{\theta} = L$$

$$\int \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E}$$, με E σταθ. και $$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Κινητική Ενέργεια

Φυγοκεντρικό δυναμικό

Νόμος διατήρησης μηχανικής ενέργειας

ανηγμένο/ισοδύναμο δυναμικό

Εξίσωση του Νεύτωνα

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F\,\hat{e}_r$$

\+

Πολικές συντεταγμένες

r, θ

$\Rightarrow$

$$m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = L$$

Πρώτα ολοκληρώματα: προσδιορισμός τροχιάς της κίνησης υλικού σημείου

> 0 $\quad$ > 0 ή < 0

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E} \Longrightarrow \boxed{E > 0 \text{ ή } < 0}$$

$$\boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

$$T + V = E$$

ή

$$\frac{1}{2}m|\dot{r}|^2 + V(r) = E$$

Σε πολικές συντεταγμένες: r, θ

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{r}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E}$$

$$\boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) =$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$$

$$\Rightarrow \quad T + V = E$$

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

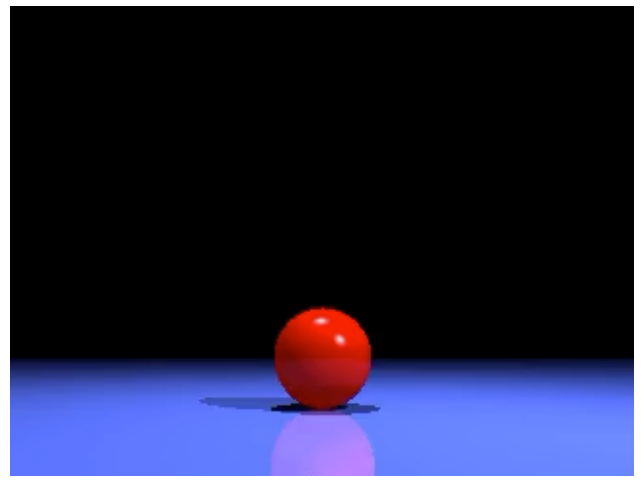
Μπορεί μια κεντρική δύναμη να μην απορρέει από κεντρικό δυναμικό V(r);

Μπορεί μια κεντρική δύναμη να μην απορρέει από κεντρικό δυναμικό V(r);

Προϋποθέσεις:

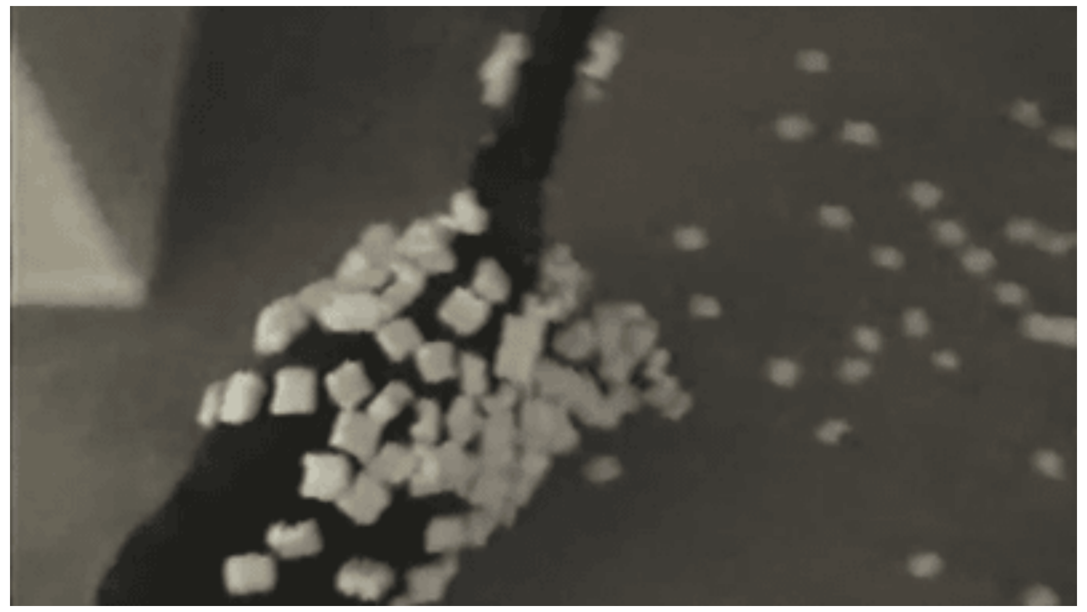
1. Ανεξάρτητη της διαδρομής & έργο = 0
2. Στροβιλισμός = 0
3. Δύναμη = συνάρτηση δυναμικού $\vec{F} = V(r)\,\hat{e}_r$

Μπορεί μια κεντρική δύναμη να μην απορρέει από κεντρικό δυναμικό V(r);



βαρυτική

ελαστική, δύναμη επαναφοράς



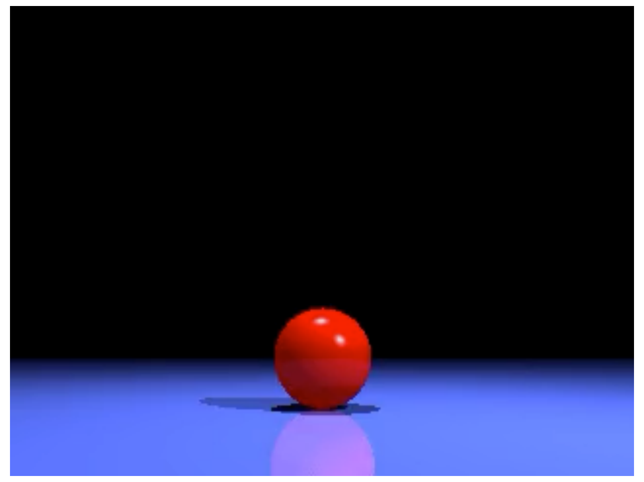
ηλεκτροστατική

Προϋποθέσεις:

1. Ανεξάρτητη της διαδρομής & έργο = 0
2. Στροβιλισμός = 0
3. Δύναμη = συνάρτηση δυναμικού $\vec{F} = V(r)\,\hat{e}_r$

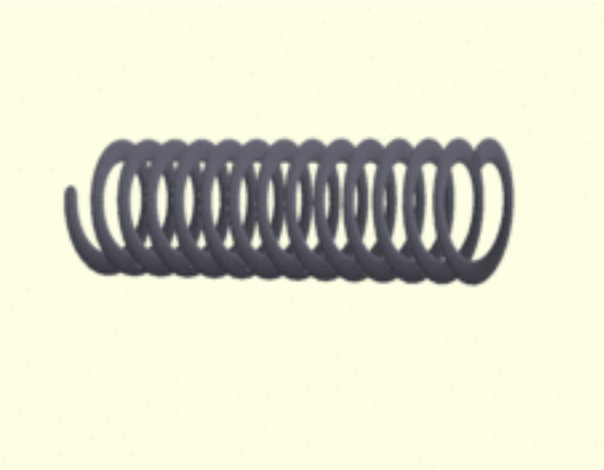
κουιζάκι 2

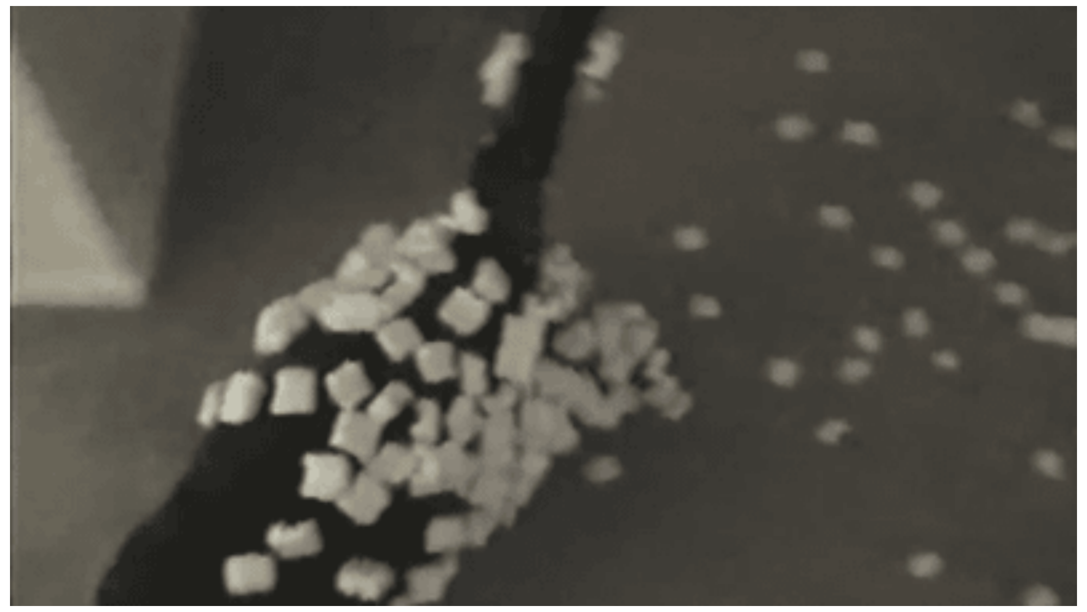
Μπορεί μια κεντρική δύναμη να μην απορρέει από κεντρικό δυναμικό V(r);



βαρυτική

ελαστική, δύναμη επαναφοράς





ηλεκτροστατική

Προϋποθέσεις:

1. Ανεξάρτητη της διαδρομής & έργο = 0
2. ~~Στροβιλισμός = 0~~ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ
3. ~~Δύναμη = συνάρτηση δυναμικού~~ $\cancel{\vec{F} = V(r)\,\hat{e}_r}$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

μαγνητική

Ελένη Βαρδουλάκη
elenivard@gmail.com

Ισοδύναμος με το νόμο διατήρησης της στροφορμής

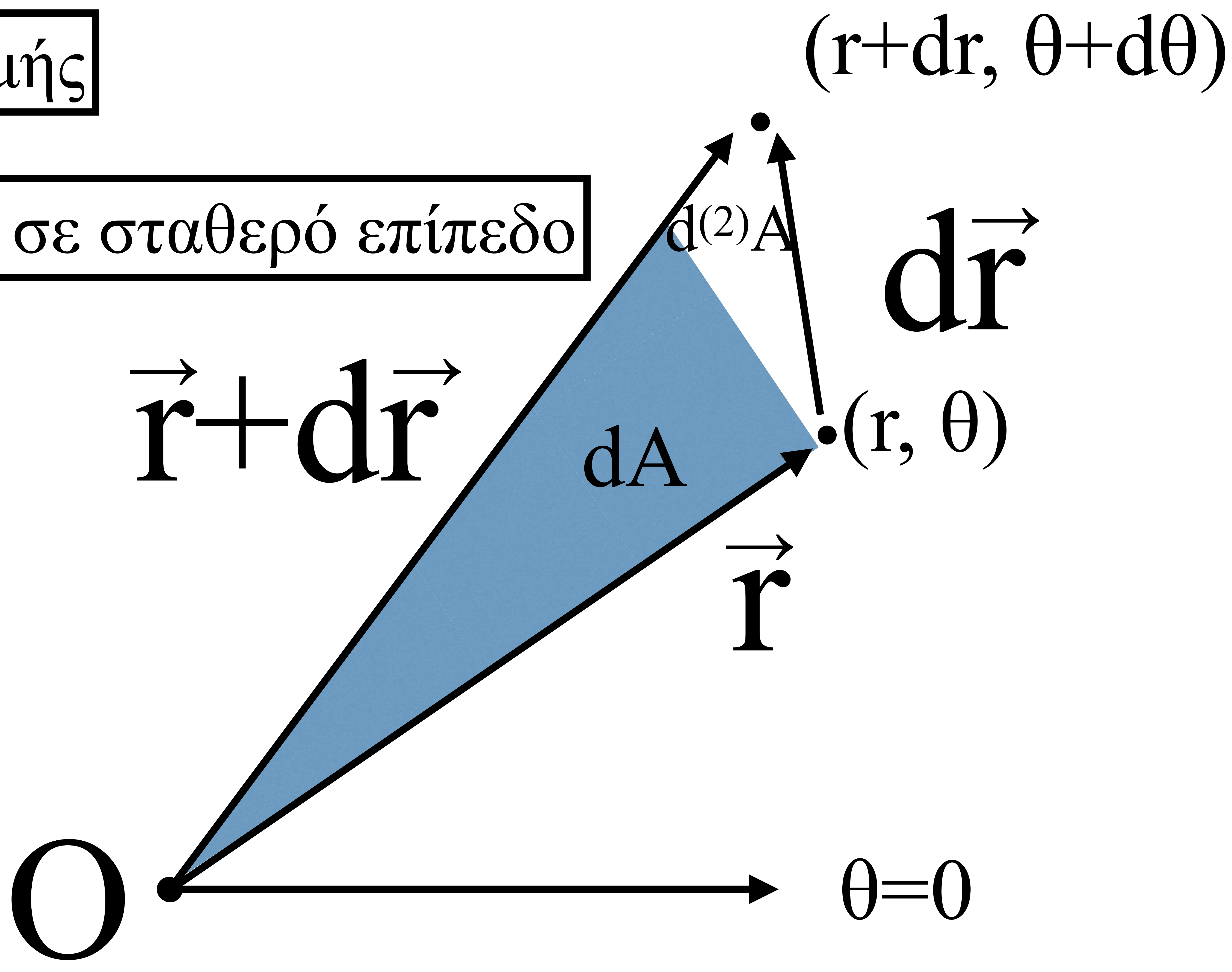
Το r διαγράφει ίσα εμβαδά A σε ίσο χρόνο t πάνω σε σταθερό επίπεδο

$$\boxed{A = \frac{L}{2m}t}$$

Απόδειξη:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad \xrightarrow[mr^2\frac{d\theta}{dt} = L]{\text{dt}} \quad dA = \frac{L}{2m}dt$$

Αποτέλεσμα ανεξάρτητο από το εκάστοτε κεντρικό δυναμικό



*d(2)A, παραλείπεται ως απειροστό ανωτέρας τάξης

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

Παράδειγμα: βαρυτικό δυναμικό

ισοδύναμο δυναμικό:

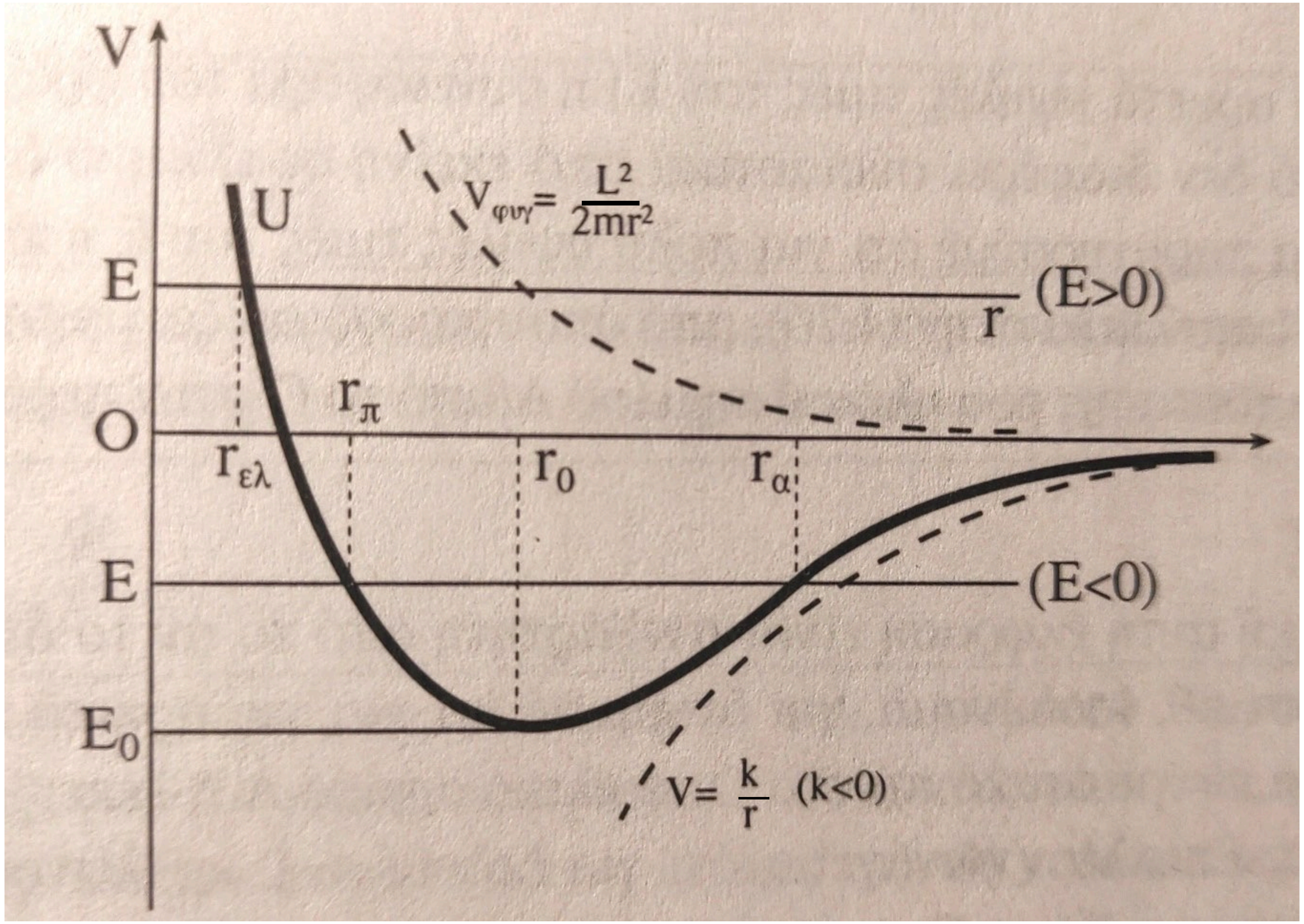
$$U(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$U(r) = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}, k = -G_N M m$$

<0, ελκτικό δυναμικό

Ανοιχτές τροχιές E>0

Κλειστές τροχιές E<0



ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

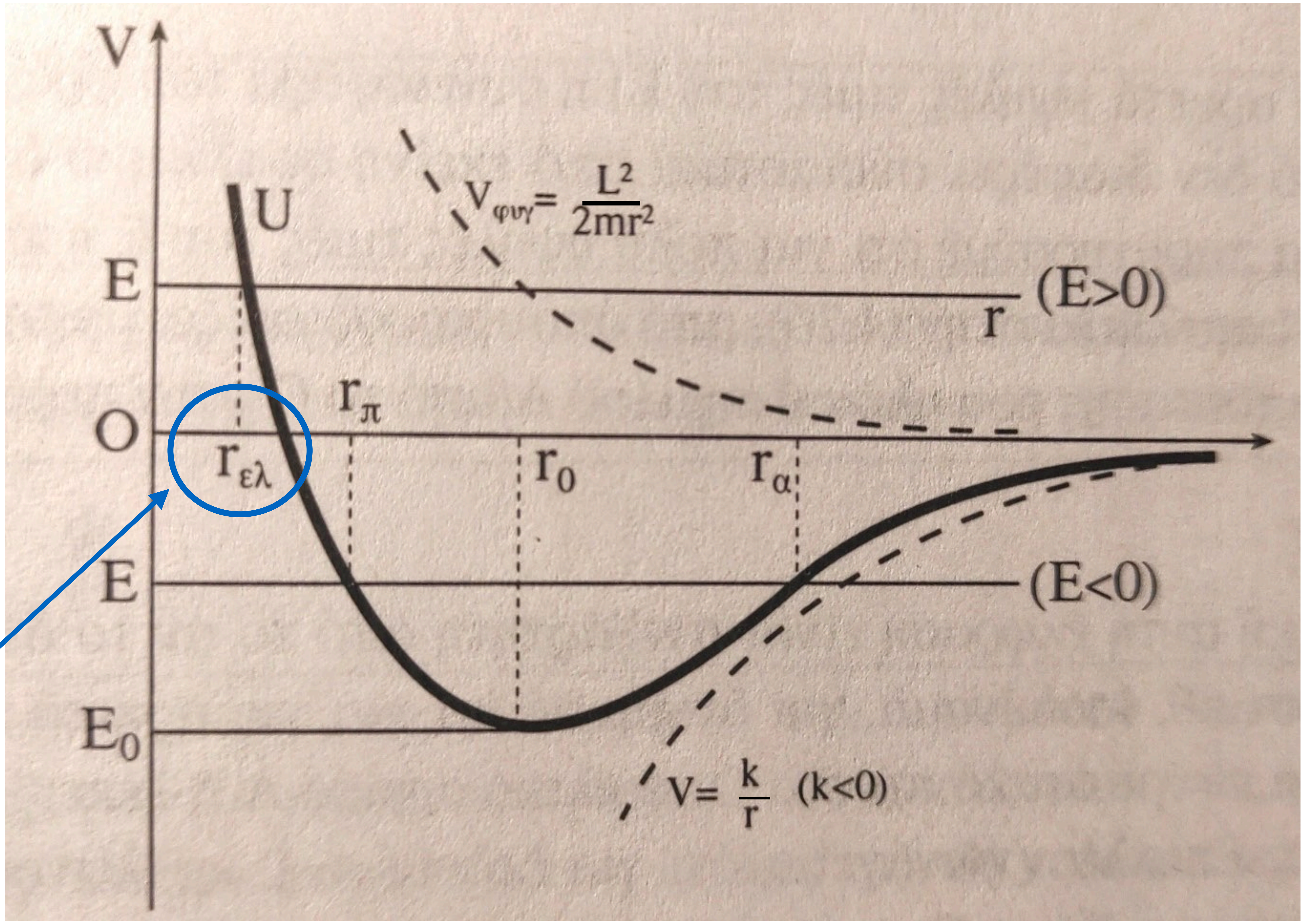
Ανοιχτές τροχιές E>0,
διαφεύγουν στο άπειρο ή $r_{\varepsilon\lambda}$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = E \quad , \text{για } \dot{r} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = E$$

$$r_{\varepsilon\lambda} = \frac{k}{2E} + \sqrt{(\frac{k}{2E})^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

Θέση αψίδας

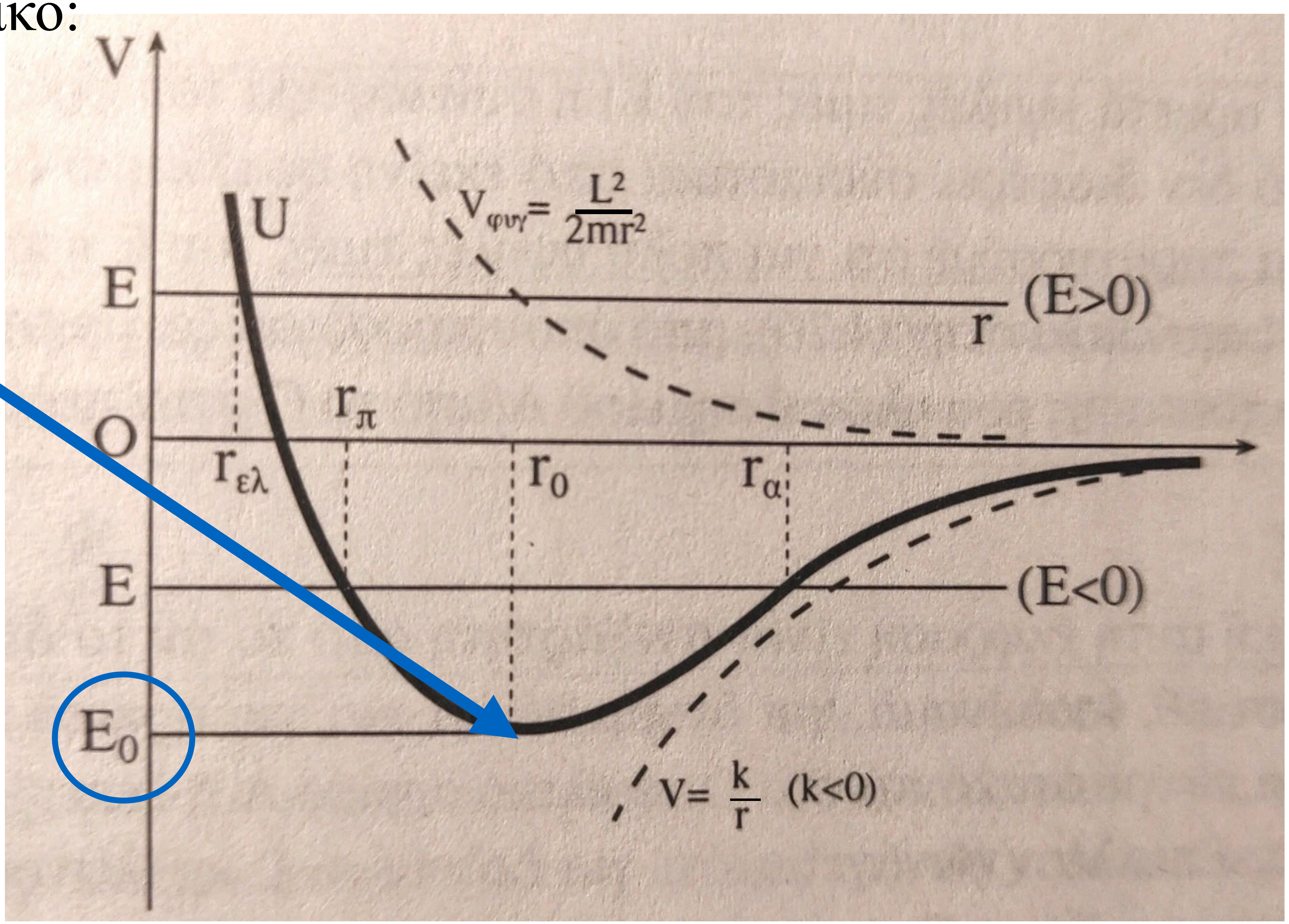


πχ. κομήτης θα ανακλαστεί

Παράδειγμα: βαρυτικό δυναμικό

Κλειστές τροχιές E<0 & ελκτικό δυναμικό:
Κλασικά προσιτές περιοχές για

$E_0 < E < 0$, όπου $$E_0 = -\frac{mk^2}{2L^2}$$



Παράδειγμα: βαρυτικό δυναμικό

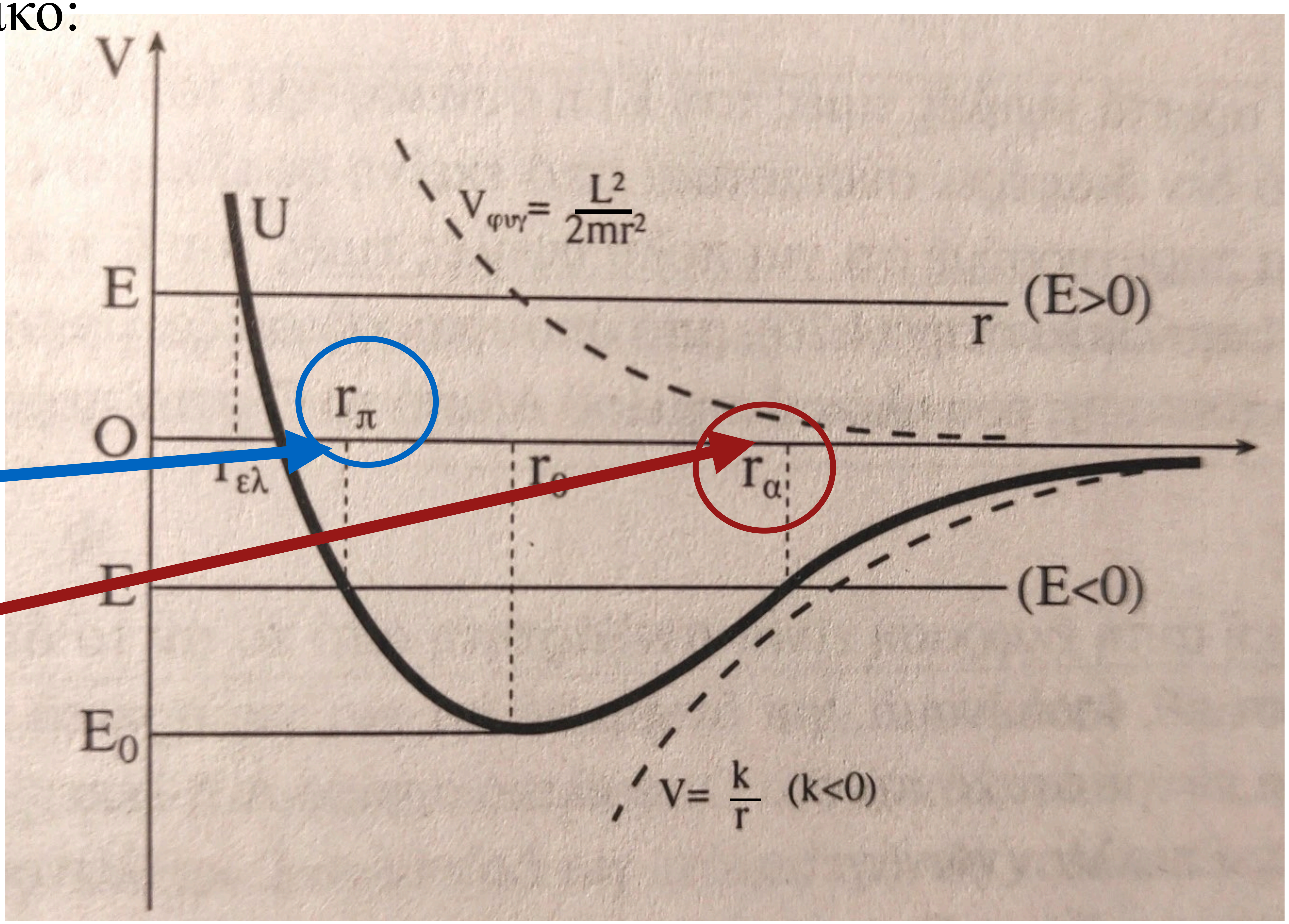
Κλειστές τροχιές E<0 & ελκτικό δυναμικό:
Κλασικά προσιτές περιοχές για

$E_0 < E < 0$, όπου $$E_0 = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

r_π: προσήλιο, ελάχιστη προσέγγιση

r_α: αφήλιο, μέγιστη απομάκρυνση

r_π, r_α: αψίδες κίνησης, $\dot{r} = 0$



ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

Παράδειγμα: βαρυτικό δυναμικό

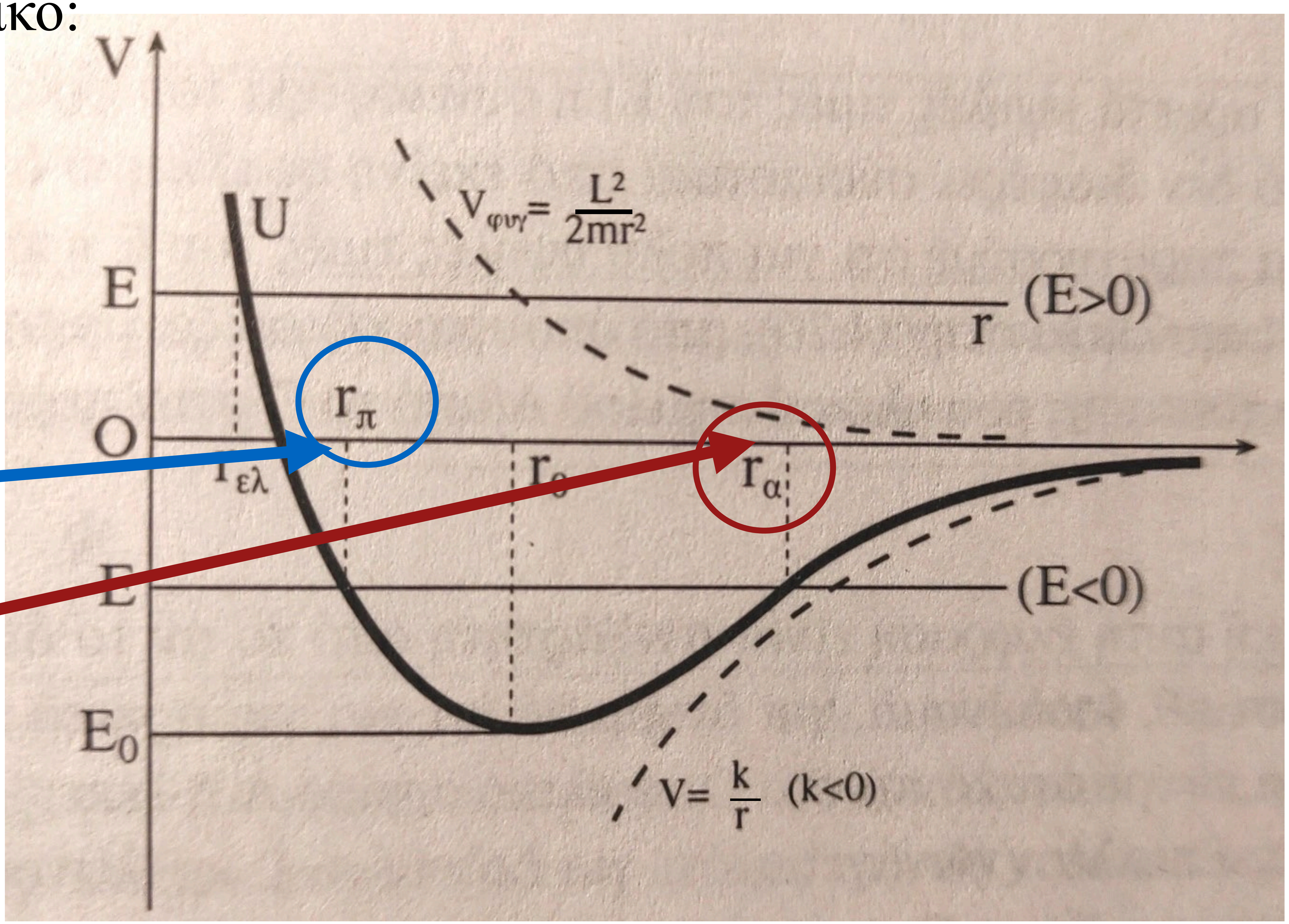
Κλειστές τροχιές Ε<0 & ελκτικό δυναμικό:
Κλασικά προσιτές περιοχές για

$E_0 < E < 0$, όπου $$E_0 = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

$$r_\pi = \frac{k}{2E} - \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

$$r_\alpha = \frac{k}{2E} + \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

r_π, r_α: αψίδες κίνησης, $\dot{r} = 0$



πχ. κίνηση πλανητών

ΕΛΕΝΗ ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗ
ELENIVARD@GMAIL.COM

Περίληψη

1. Τι είναι οι κεντρικές δυνάμεις;

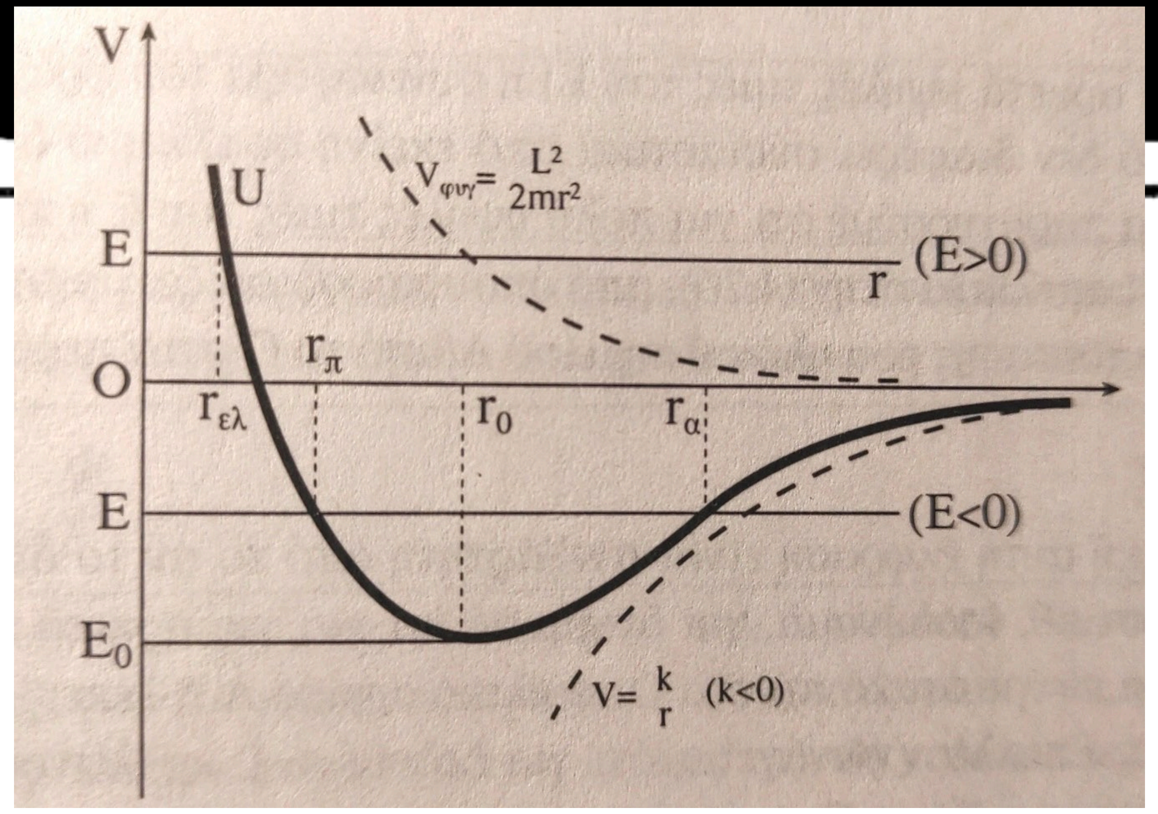
$$\vec{F} = f(r)\,\hat{e}_r$$

2. Πως κινείται μια σημειακή μάζα σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων;

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E}$$

$$\boxed{mr^2\frac{d\theta}{dt} = L = \sigma\tau\alpha\theta\,.}$$

3. Παραδείγματα



Ελενη Βαρδουλακη
elenivard@gmail.com

Βιβλιογραφία

1. Κλασική Μηχανική, Ν. Α. Μπατάκη, Εκδόσεις Γκόβοστη
2. Νευτώνια Μηχανική, Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος, Εκδόσεις ΚΑΛΛΙΠΟΣ
3. Κλασική Μηχανική, Σ. Ν. Πνευματικός
4. Feynman Lectures in Physics, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/